This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

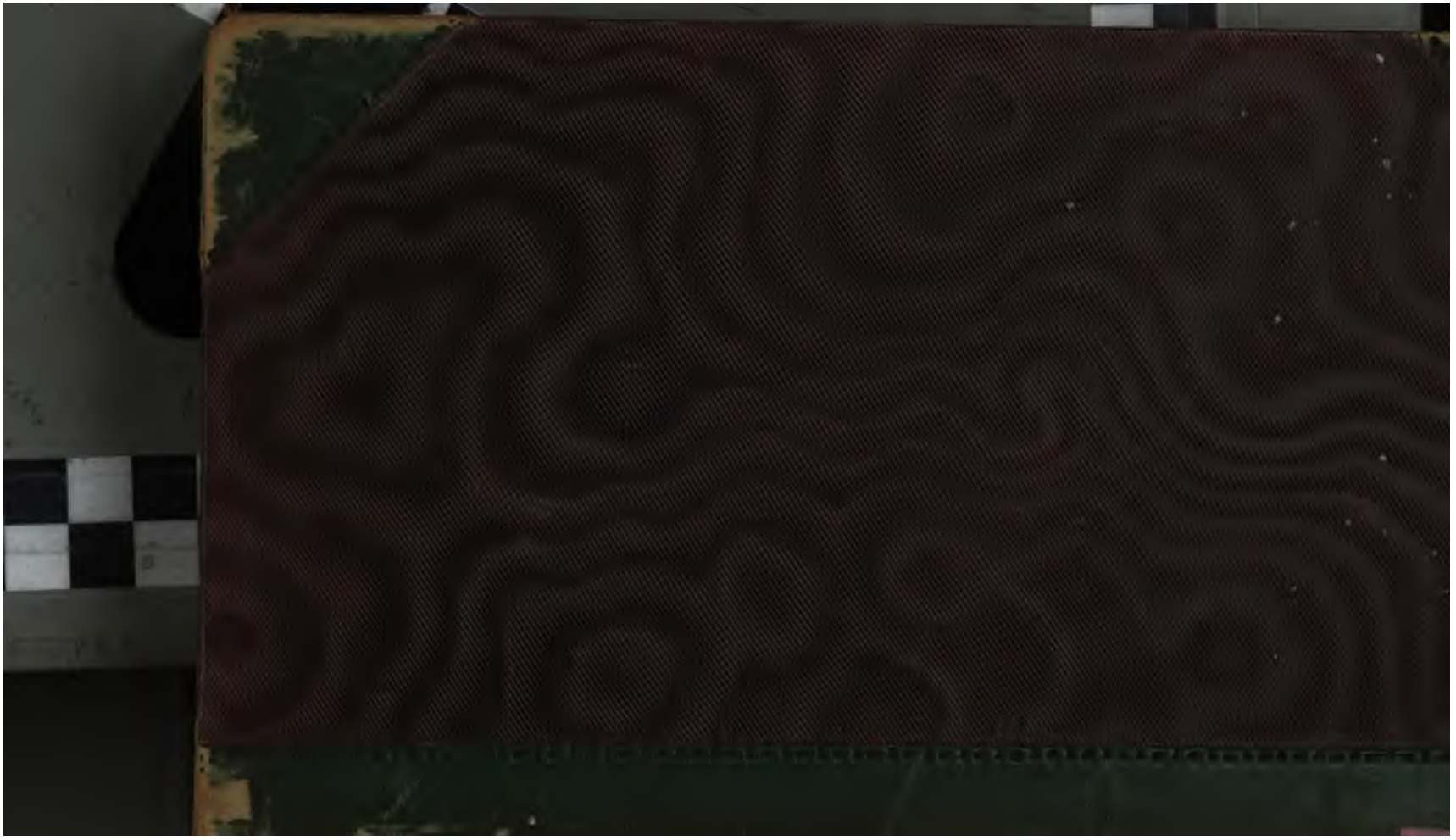
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



H. W. Richmond.
K C C

Lehrbuch

der

STATIK

von

August Ferdinand Möbius,

Professor der Astronomie zu Leipzig, Correspondenten der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin und Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft in Leipzig.

Zweiter Theil.

Mit einer Kupfertafel.

LEIPZIG

bei Georg Joachim Göschen.

1837.

Inhalt des zweiten Theils.

Gesetze des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf mehrere mit einander verbundene feste Körper wirken.

Erstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte bei zwei mit einander verbundenen Körpern.

§. 188. Begriff des mit einander Verbundenseyns von Körpern im Allgemeinen. — §. 189. Die Art der Verbindung, welche hier allein berücksichtigt werden soll, ist die gegenseitige Berührung der Körper.

§. 190. Grundsätze. — §. 191. Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf einen frei beweglichen Körper und einen in dessen Oberfläche beweglichen Punkt wirken. — §. 192. Bedingungen des Gleichgewichts, wenn entweder der Körper oder der Punkt unbeweglich angenommen wird; wenn auf mehrere in der Oberfläche des Körpers bewegliche Punkte Kräfte wirken; u. s. w. Geometrische Folgerungen. — §. 193. Ein Körper, dessen Oberfläche durch 6 oder mehrere unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt ist, ist im Allgemeinen ebenfalls unbeweglich. Bei weniger als 6 unbeweglichen Punkten findet stets noch Beweglichkeit statt.

§. 194. Bedingungen des Gleichgewichts bei zwei sich in einem Punkte mit ihren Flächen berührenden Körpern. — §. 195. Begriff der Gegenkräfte. — §§. 196. 197. Bedingung des Gleichgewichts bei zwei sich in mehrern Punkten berührenden Körpern.

§. 198. Ausser der Flächenberührung kann die Begegnung zweier Körper in einem Punkte auch darin bestehen, dass eine Ecke oder Kante des einen Körpers an eine Ecke, Kante oder Fläche des andern trifft. Wie diese Arten der Begegnung auf die Flächenberührung immer zurückgeführt werden können. Die Richtung der Gegenkräfte wird hierbei zum Theil oder ganz unbestimmt. — §. 199. Allgemeinere Bestimmung des Begriffs der Gegenkräfte. Bedingung des Gleichgewichts zwischen zwei sich berührenden Körpern im allgemeinsten Falle. — §. 200. Uebereinstimmung und Verschiedenheit zwischen den im Vorigen eingeführten Gegenkräften und den in der Wirklichkeit stattfindenden Pressungen und Spannungen.

Gleichgewicht an einem nicht völlig frei beweglichen Körper. §. 201. Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, wenn ein Punkt des Körpers unbeweglich ist, oder wenn ein Punkt in einer unbeweglichen Linie oder Fläche beweglich ist; — §. 202. wenn zwei Punkte des Körpers unbeweglich sind, oder wenn einer derselben, oder beide in unbeweglichen Linien etc. beweglich sind; — §. 203. wenn drei Punkte des Körpers in einer unbeweglichen Ebene beweglich sind. Sind drei Punkte des Körpers unbeweglich oder in unbeweglichen Linien beweglich, so ist der Körper selbst im Allgemeinen unbeweglich. — §. 204. Den 6 Bedingungsgleichungen fürs Gleichgewicht eines Körpers entsprechen 6 von einander unabhängige Bewegungen des Körpers. Ist er an einigen dieser Bewegungen gehindert, so ist die Erfüllung der Gleichungen, die den noch möglichen übrigen Bewegungen entsprechen, die Bedingung des Gleichgewichts.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte bei einer beliebigen Anzahl mit einander verbundener Körper.

§. 205. Bedingung dieses Gleichgewichts, wenn alle Körper des Systems an sich frei beweglich sind. — §. 206. Nachträgliche Bemerkungen. — §. 207. Die Bedingung des Gleichgewichts eines Systems von Körpern besteht in jedem Falle in der Möglichkeit, in den Berührungspunkten der Körper Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass jeder Körper des Systems für sich ins Gleichgewicht kommt.

Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten bei mit einander verbundenen Körpern. §§. 208—210. Beweis, dass die in §. 178. für das Gleichgewicht eines einzigen Körpers bewiesene Gleichung auch beim Gleichgewichte mehrerer mit einander verbundener Körper Gültigkeit hat. — §. 211. Beweis des umgekehrten Satzes nach Laplace und Poisson. — §. 212. Anderer Beweis des umgekehrten Satzes.

§. 213. Bei jedem Systeme von Körpern, welches sich im Gleichgewichte befindet, ist die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes von einem unbeweglichen in ihrer Richtung beliebig genommenen Punkte ein Maximum oder Minimum, und zwar ersteres, wenn das Gleichgewicht sicher, letzteres, wenn es unsicher ist. — §. 214. Elementarer Beweis dieses Satzes.

Drittes Kapitel.

Anwendung der vorhergehenden Theorie auf einige Beispiele.

§. 215. Uebersicht des Verfahrens, nach welchem jede hierbei vorkommende Aufgabe in Gleichungen gesetzt und gelöst werden kann. — §§. 216. 217. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf 4 sich berührende Kugeln wirken. — §§. 218. 219. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen 4 Kräften, welche auf

die Ecken eines Vierecks wirken, dessen Seiten von unveränderlicher Länge, dessen Winkel aber veränderlich sind. — §§. 220—223. Betrachtung des speciellen Falles, wenn das Viereck ein ebenes ist. — §. 224. Eben so, wie bei einem Vierecke, lassen sich auch bei einem mehrseitigen Vielecke mit veränderlichen Winkeln und Seiten von constanter Länge die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, die an den Ecken angebracht sind, ausmitteln. Geometrische Folgerungen. — §§. 225. 226. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften zu finden, welche auf die Seiten eines Vierecks wirken, dessen Seiten von constanter Länge, die Winkel aber veränderlich sind. — §§. 227—230. Dieselbe Aufgabe unter einigen speciellen Voraussetzungen. — §§. 231. 232. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, die auf 3 Gerade wirken, welche an 3 unbeweglichen Punkten verschiebbar sind, und deren gegenseitige Durchschnitte in 3 unbeweglichen Geraden einer Ebene beweglich sind. Geometrische Folgerungen. — §. 233. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf die gegenseitigen Durchschnitte von 3 Geraden wirken, die um 3 unbewegliche Punkte beweglich sind.

Bedingungen des Gleichgewichts bei sich ähnlich bleibenden Figuren. §§. 234. 235. Sind drei Punkte in einer Ebene dergestalt beweglich, dass das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt, und sollen drei auf sie in der Ebene wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so müssen sich die Richtungen der Kräfte in einem Punkte schneiden, der mit erstern drei Punkten in einem Kreise liegt. Weitere Folgerungen. — §. 236. Ausdehnung dieser Untersuchung auf Systeme von vier und mehrern Punkten.

Viertes Kapitel.

Von den Bedingungen der Unbeweglichkeit.

§. 237. Wenn das Gleichgewicht eines Systems mit einander verbundener, an sich frei beweglicher Körper, auf welche Kräfte nach beliebigen Richtungen wirken, durch nicht mehr als 6 Gleichungen bedingt ist, so kann keine gegenseitige Beweglichkeit zwischen den Körpern statt finden, — §§. 238. 239. Wie überhaupt bei einem Systeme mit einander verbundener Körper aus der Anzahl der Körper und der Anzahl und Beschaffenheit ihrer Begegnungen über ihre gegenseitige Beweglichkeit geurtheilt werden kann. — §. 240. Geometrischer Beweis, dass die gegenseitige Lage zweier Körper im Allgemeinen unveränderlich ist, wenn in der Oberfläche des einen Körpers 6 bestimmte Punkte des andern enthalten seyn sollen. — §. 241. Hieraus abgeleitete Fälle, in denen einem Systeme von weniger als 6 Punkten, die in unabänderlichen Entfernungen von einander sind, keine Bewegung mehr gestattet ist. — §. 242. Sollen n Körper, die durch Berührung ihrer Flächen mit einander verbunden sind, eine unveränderliche Lage gegen einander haben, so müssen sie sich in wenigstens $6\,(n-1)$ Punkten berühren. Fälle, in denen man sich schon im Voraus der gegenseitigen Unbeweglichkeit versichert halten kann. — §. 243. Analoge Sätze bei krummen Linien in Ebenen.

§. 244. Nutzen der vorhergehenden Betrachtungen, um bei einer geometrischen Figur zu bestimmen, wie viel Stücke derselben gegeben seyn müssen, um daraus alle übrigen finden zu können. — §. 245. Erläuterung an einem Polyeder, von welchem alle Kanten ihrer Länge nach gegeben angenommen werden. — §. 246. Bedingung, unter welcher bei einem Systeme zusammenhängender Vielecke in einer Ebene aus den Längen der Seiten allein alle übrigen Stücke der Figur bestimmt werden können. — §. 247—249. Enthält eine Figur unbewegliche Punkte, eine ebene wenigstens zwei, eine räumliche wenigstens drei, so wird die gegenseitige Unbeweglichkeit der Theile der Figur eine vollkommene Unbeweglichkeit. Statische Untersuchung dieser Unbeweglichkeit. Beispiele.

Fünftes Kapitel.

Von der unendlich kleinen Beweglichkeit.

§. 250. Werden von den Theilen einer Figur so viele unveränderlich angenommen, dass die gegenseitige Lage der Theile im Allgemeinen unveränderlich wird, so lassen sich immer noch specielle Bedingungen für das Verhalten der Theile zu einander ausfindig machen, unter denen die gegenseitige Unbeweglichkeit aufhört. — §. 251. Untersuchung der Beschaffenheit der Gleichungen, welche diese Bedingungen ausdrücken. — §. 252. Die bei einer solchen Bedingungsgleichung statt findende Beweglichkeit der Figur ist im Allgemeinen unendlich klein, und es hat alsdann jedes von den unveränderlich gesetzten Stücken der Figur, wenn man es veränderlich werden, die übrigen aber constant bleiben lässt, seinen grössten oder kleinsten Werth. Hieraus entspringende neue Methode, um mit Hülfe der Statik geometrische Aufgaben über Maxima und Minima zu lösen. — §. 253. Die Bedingung zu finden, unter welcher ein Winkel eines ebenen Vierecks, dessen Seiten constante Längen haben, seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht. — §§. 254—256. Die Bedingung, unter welcher ein Viereck beweglich wird, welches Seiten von constanter Länge, aber veränderliche Winkel hat, und dessen Ecken in unbeweglichen in seiner Ebene enthaltenen Linien beweglich sind. Analoge Bedingung für das Dreieck und mehrseitige Vielecke. — §§. 257. 258. Vier gerade Linien von unbestimmter Länge, von denen jede der nächstfolgenden und die letzte der ersten zu begegnen genöthigt ist, liegen in einer horizontalen Ebene und sind um unbewegliche Punkte in verticalen Ebenen drehbar. Man soll für dieses System, welches im Allgemeinen unbeweglich ist, die Bedingung der Beweglichkeit und die dann nöthige Bedingung des Gleichgewichts finden. Duales Verhältniss zwischen dieser Aufgabe und der vorigen. — §. 259. Dieselbe Aufgabe für ein System von drei Linien. Lösung eines statischen Paradoxons. — §. 260. Bedingung der Beweglichkeit eines Systems dreier Geraden, welche in einer Ebene an drei unbeweglichen Punkten verschiebbar, und deren gegenseitige Durchschnitte in unbeweglichen Linien der Ebene beweglich sind. — §§. 261. 262. Bedingung der Beweglichkeit eines in einer Ebene begriffenen Vierecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, von dessen Seiten zwei einander gegenüberliegende zwei unbewegliche

Punkte enthalten. — §. 263. Bedingung des Gleichgewichts an diesem Vierecke. Die Roberval'sche Waage. — §§. 264. 265. Bedingung der Beweglichkeit eines ebenen Sechsecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, bei welchem eine Seite um die andere einen unbeweglichen Punkt enthält. — §§. 266. 267. Bedingung der Beweglichkeit eines ebenen Vierecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, bei welchem jede Seite an einem unbeweglichen Punkte verschiebbar ist.

Sechstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an Ketten und an vollkommen biegsamen Fäden.

§. 268. Erklärung einer Kette und eines Fadens. — §. 269. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen zwei Kräften, welche auf den Anfang und das Ende einer frei beweglichen Kette oder — §. 270. eines frei beweglichen Fadens wirken. — §. 271. Die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die Kette oder — §. 272. der Faden, auf dessen Enden Kräfte wirken, über eine unbewegliche Fläche gelegt ist. Grösse und Richtung der Spannung des Fadens. — §§. 273. 274. Bestimmung der vom Faden auf die Fläche ausgeübten Pressung. Bedingungen die Richtung der Kräfte und die Seite, welche die Fläche dem Faden zukehrt, betreffend. — §. 275. Untersuchung der Fälle, wenn der Faden nur zum Theil über die Fläche gelegt ist, und — §. 276. wenn die Fläche beweglich ist. — §§. 277. 278. Beispiele zu diesen Fällen. — §. 279. Das Gleichgewicht eines über eine Fläche gespannten Fadens dauert fort, wenn man die Fläche wegnimmt und auf alle seine Punkte Kräfte wirken lässt, welche die Stelle der von der Fläche auf den Faden ausgeübten Pressung ersetzen.

§. 280. Die Bedingungen des Gleichgewichts eines frei beweglichen Fadens, wenn auf alle seine Punkte ihrer Richtung und Grösse nach gegebene Kräfte wirken. Darstellung dieser Bedingungen durch zwei aus dem Princip der Spannung entwickelte Integralgleichungen. — §. 281. Entwickelung derselben Gleichungen aus dem Princip der Momente. Bestimmung der bei der Integration hinzukommenden 3 oder 5 Constanten, nachdem der Faden in einer Ebene oder im Raume überhaupt enthalten ist. — §. 282. Die Bedingungen des Gleichgewichts, durch zwei Differentialgleichungen ausgedrückt. — §. 283. Entwickelung noch anderer bemerkenswerther Relationen, welche beim Gleichgewichte statt finden. — §§. 284. 285. Die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn der in allen seinen Theilen der Wirkung von Kräften unterworfene Faden auf einer unbeweglichen Fläche beweglich ist. — §. 286. Wie in den vorhergehenden Formeln die Dichtigkeit und die Dicke des Fadens zu berücksichtigen sind.

Von der Kettenlinie. §. 287. Die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die auf alle Punkte des Fadens wirkenden Kräfte parallele Richtungen haben. Gesetz der Spannung in diesem Falle. — §. 288. Begriff und einfachste Gleichung der Kettenlinie. — §. 289. Gleichung der Kettenlinie zwischen rechtwinkligen Coordinaten. Parameter und Directrix einer Kettenlinie. — §. 290. Rectification und Quadratur der Kettenlinie. — §§. 291. 292. Zwei Gleichungen für

die Spannung der Kettenlinie. Folgerungen aus denselben. Elementare Beweise dieser Gleichungen und damit der Gleichung für die Kettenlinie selbst. — §. 293. Ein gleichförmig schwerer Faden von gegebener Länge wird mit seinen Enden an zwei gegebenen unbeweglichen Punkten befestigt. Die Elemente der von ihm gebildeten Kettenlinie zu bestimmen. — §. 294. Zusätze und Folgerungen. — §. 295. Ein gleichförmig schwerer mit seinen Enden befestigter Faden bildet auch dann eine Kettenlinie, wenn er auf eine gegen den Horizont geneigte Ebene gelegt ist.

Siebentes Kapitel.

Analogie zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines Punktes.

§. 296. Einleitung. — §. 297. Durch Construction wird gezeigt, wie aus dem Gleichgewichte an einem Faden auf die Bewegung eines Körpers in der Fadenlinie mit einer der Spannung des Fadens überall proportionalen Geschwindigkeit geschlossen werden kann. — §. 298. Beispiele. Bewegung in einer Kettenlinie. — §. 299. Umgekehrt kann von der Bewegung eines Körpers auf das Gleichgewicht an einem Faden, dessen Gestalt der Bahn des Körpers und dessen Spannung der Geschwindigkeit des letztern proportional ist, ein Schluss gemacht werden. Gleichgewicht an einem parabolisch gekrümmten Faden. — §. 300. Modification des Ueberganges von der Bewegung zum Gleichgewichte durch Anwendung eines Fadens, dessen Masse ungleichförmig vertheilt ist. Statische Darstellung der Planetenbewegungen. — §. 301. Die vorigen Sätze leiden auch dann noch vollkommene Anwendung, wenn die Beweglichkeit des Fadens und die des Körpers auf eine unbewegliche Fläche beschränkt sind. — §. 302. Analytische Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Gleichgewichte eines Fadens und der Bewegung eines Körpers.

§. 303. Die Sätze der Dynamik, welche unter den Namen des Princips der Flächen, des Princips der lebendigen Kräfte und des Princips der kleinsten Wirkung bekannt sind, können ebenfalls auf das Fadengleichgewicht übergetragen werden. — §. 304. Uebertragung des ersten dieser Principe. — §. 305. Uebertragung des zweiten und dritten. — §. 306. Letztere zwei gelten auch dann noch, wenn der Faden über eine Fläche gespannt ist. — §. 307. Erläuterung des dritten Princips an der Kettenlinie. Die Tiefe des Schwerpunkts einer Kettenlinie ist ein Maximum. Bestimmung der Coordinaten dieses Schwerpunkts. — §. 308. Eine Kettenlinie zu beschreiben, welche durch zwei in einer Horizontalen liegende gegebene Punkte geht und eine andere gegebene Horizontale zur Directrix hat. — §. 309. Maximum und Minimum, welchen die zwei die vorige Aufgabe lösenden Kettenlinien angehören.

Achtes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an elastischen Fäden.

§. 310. Begriff der Elasticität im Allgemeinen. Erklärung einer

elastischen Linie, Fläche, Körpers. — §. 311. Wie bei einem Systeme von Punkten, von denen je zwei elastisch mit einander verbunden sind, die durch Einwirkungen äusserer Kräfte entstehenden elastischen Kräfte und die Aenderung der gegenseitigen Lage der Punkte bestimmt werden können. — §. 312. Anwendung des Vorigen auf eine geradlinige Reihe von Punkten.

Gleichgewicht an einem elastisch dehnbaren Faden. §. 313. Die Bedingungsgleichungen für dieses Gleichgewicht. — §. 314. Gleichung der elastischen Kettenlinie. Um wie viel hierbei jeder Theil der Kette ausgedehnt wird. — §. 315. Ausdehnung eines frei herabhängenden elastischen Fadens durch sein eigenes und ein an sein unteres Ende befestigtes Gewicht. Von John Herschel vorgeschlagene Methode, das Verhältniss zu bestimmen, nach welchem sich von einem Orte der Erde zum andern die Schwerkraft ändert.

Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden. §. 316. Eigenschaften des elastischen Winkels. — §. 317. Hiermit können die Bedingungen für's Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden ohne Weiteres aus den Bedingungen, welche an einem vollkommen biegsamen Faden gelten, hergeleitet werden. — §. 318. Bemerkungen das Moment der Elasticität in irgend einem Punkte des Fadens betreffend. Was zur Erhaltung des Gleichgewichts geschehen muss, wenn der Faden irgendwo unterbrochen wird. Begriff der Spannung am elastischen Faden. — §. 319. Gleichung für das Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden, wenn auf alle Punkte desselben in einer Ebene enthaltene Kräfte wirken; vorausgesetzt wird, dass das Moment der Elasticität der Krümmung des Fadens proportional ist. Bestimmung der 5 willkührlichen Constanten bei der Integration der Gleichung. — §. 320. Gleichung des Gleichgewichts, wenn das erste und das letzte Element des Fadens in gegebenen Lagen in einer Ebene befestigt sind, sonst aber keine Kräfte auf den Faden wirken, oder Gleichung der elastischen Linie in einer Ebene. Axe der Linie. — §. 321. Andere Formen dieser Gleichung. Spannung der Linie. — §. 322. Gleichung bei einer nur sehr geringen Abweichung der Linie von der Axe. Elastische Kraft der Linie; Gesetz dieser Kraft. — §. 323. Die elastische Linie kann auch die Gestalt eines Kreises haben. Die Axe ist alsdann unendlich entfernt und die Spannung überall null. — §. 324. Die Gleichungen für das Gleichgewicht eines elastisch biegsamen Fadens im Raume. — §. 325. Bestimmung der 9 willkührlichen Constanten bei der Integration dieser Gleichungen. Sicherung des Gleichgewichts, wenn der Faden irgendwo unterbrochen wird. Spannung des Fadens. — §. 326. Die Gleichungen der elastischen Linie im Raume oder der Gestalt eines elastisch biegsamen Fadens, wenn auf ihn keine äussern Kräfte wirken, sondern bloss das erste und das letzte Element desselben irgend gegebene Lagen im Raume einnehmen. Merkwürdige Eigenschaften dieser Linie. — §. 327. Unter die verschiedenen Arten der elastischen Linie im Raume gehört auch die cylindrische Spirallinie.

§. 328. Wie den in §. 305. auf das Gleichgewicht an einem vollkommen biegsamen Faden übergetragenen Sätzen von der lebendigen Kraft und der kleinsten Wirkung verwandte Sätze auch beim Gleichgewichte an einem elastisch biegsamen Faden entsprechen. — §. 329. Anwendung hiervon auf die elastische Linie. Ein merkwürdiger Satz Dan. Bernoulli's. Ausdehnung der vorigen Untersuchung auf den

Fall, wenn das Moment der Elasticität in jedem Punkte des Fade einer beliebigen Function des Krümmungshalbmessers daselbst propc tional ist.

Gleichgewicht an einem elastisch drehbaren Fade §. 330. Begriff dieser Drehbarkeit. Bestimmung der Elasticität ein von zwei Ebenen gebildeten Winkels. — §. 331. Die Bedingungsgl chungen für das Gleichgewicht an dem elastisch drehbaren Faden. §. 332. Bestimmung der 12 Constanten bei der Integration dies Gleichungen. — §. 333. Vereinfachung der einen Gleichung für d Fall, wenn nur am Anfang und Ende des Fadens Kräfte angebrac sind. In diesem Falle, und wenn die anfängliche Gestalt des Fade ein Kreis ist, kann seine nachherige Gestalt auch die einer cylind schen Spirale seyn.

Zweiter Theil.

Gesetze des Gleichgewichts

zwischen Kräften,

welche auf mehrere mit einander verbundene feste Körper wirken.

Erstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte bei zwei mit einander verbundenen Körpern.

§. 188.

Nachdem wir in dem Bisherigen die Gesetze des Gleichgewichts zwischen Kräften, die auf einen und denselben Körper wirken, erforscht haben, wollen wir gegenwärtig die Bedingungen zu bestimmen suchen, welche statt finden müssen, wenn Kräfte, welche an einem Systeme mit einander verbundener Körper angebracht sind, sich das Gleichgewicht halten sollen.

Zwei oder mehrere Körper nennen wir aber überhaupt mit einander verbunden, wenn die gegenseitige Lage der Körper gewissen, durch keine Kraft verletzbaren, Bedingungen unterworfen ist, so dass, wenn die Lage eines oder etlicher Körper gegeben ist, die Lage der übrigen mehr oder weniger, oder auch ganz, bestimmt ist. Hierdurch geschieht es, dass, wenn von einem Systeme mit einander verbundener Körper der eine bewegt wird, einer oder mehrere der übrigen Körper, wo nicht alle, gleichfalls ihre Lage zu verändern

genöthigt sind, dass folglich die Kraft, welche die Bewegung des einen Körpers hervorbringt, auch auf die übrigen Körper Einfluss übt, und dass daher, wenn ein solches System im Gleichgewichte seyn soll, bei jedem einzelnen Körper des Systems die unmittelbar auf ihn wirkenden Kräfte mit den Einflüssen, welche er von den an den übrigen Körpern angebrachten Kräften erfährt, das Gleichgewicht halten müssen.

Die Ermittelung dieser Einflüsse ist demnach die Hauptaufgabe des nun folgenden zweiten Theils der Statik, indem mit Berücksichtigung derselben jede Aufgabe über das Gleichgewicht eines Systems verbundener Körper auf das im ersten Theile behandelte Gleichgewicht isolirter Körper reducirt werden kann.

§. 189.

Die Bedingungen, denen man die gegenseitige Lage der Körper unterworfen annehmen kann, sind entweder ganz willkührliche, oder solche, welche in der Natur der Körper selbst ihren Grund haben. Eine willkührliche Bedingung wäre z. B. die, dass von drei Körpern, wie sie auch ihre gegenseitige Lage ändern, der Inhalt des Dreiecks, welches ihre Schwerpunkte bilden, von gleicher Grösse bleiben soll. Wenn nun auch selbst für dergleichen nur in der Idee existirende, aber nicht wohl physisch darstellbare Systeme die Gesetze des Gleichgewichts sich entwickeln lassen, so könnten diese Entwickelungen doch nur in rein mathematischer Hinsicht von Interesse seyn, sonst aber nicht, wenigstens nicht unmittelbar, einen reellen Nutzen gewähren. Wir wollen daher gegenwärtig nur diejenigen Verbindungen der Körper berücksichtigen, welche in den allgemeinen physischen Eigenschaften derselben begründet sind.

Von diesen Eigenschaften, deren man insgemein vier zu rechnen pflegt: Ausdehnung, Theilbarkeit, Trägheit und Undurchdringlichkeit, kann nun offenbar nur die letztere zugleich Ursache seyn, dass die auf den einen von zwei Körpern wirkenden Kräfte gleichzeitig auf den andern ihre Wirkung äussern, und dieses auch nur in dem Falle, wenn die Körper einander berühren, und wenn die den einen von ihnen angreifenden Kräfte ihn in den von dem andern eingenommenen Raum einzudringen nöthigen, ihn also nach der Seite zu treiben, wo ihn der andere berührt, nicht nach einer andern Richtung, indem sonst die Berührung und damit die Einwirkung aufgehoben würde.

Von dieser der Natur gemässen Bedingung wollen wir aber zur Vereinfachung und Erleichterung unserer Untersuchungen insofern wieder abweichen, dass wir die Berührung der Körper als unauflöslich betrachten, so dass, wenn von zwei durch Berührung mit einander verbundenen Körpern der eine festgehalten wird, dem andern nur diejenige Bewegung gestattet ist, bei welcher er den erstern in eben so vielen Punkten, als anfänglich, zu berühren fortfährt. Streitet nun diese Hypothese, in den meisten Fällen wenigstens, gegen die Natur der Dinge, und ist nichts vorhanden, welches zwei sich nur berührende Körper, sobald sie nach entgegengesetzten Seiten getrieben werden, sich zu trennen verhinderte, so wird es doch in jedem speciellen Falle leicht seyn, die Bedingungen zu finden, die wegen der möglichen Trennung der Körper zu den übrigen Bedingungen des Gleichgewichts noch hinzugefügt werden müssen.

Auch giebt es in der That Systeme in der Natur, die mit unserer Hypothese mehr oder weniger in Ueber

einstimmung sind. Ganz besonders ist dieses mit einem biegsamen Faden der Fall. Denn einen solchen kann man sich als ein System unendlich vieler unendlich kleiner Körper vorstellen, von denen jeder mit zwei andern durch unzertrennbare Berührung verbunden ist und man erlangt dadurch den Vortheil, das Gleichgewicht an einem biegsamen Faden nach denselben Principien, als wie das Gleichgewicht jedes andern Systems sich berührender Körper, untersuchen zu können.

Diese durch keine Kräfte auflösliche Berührung ist also die Art und Weise, auf welche wir die Körper mit einander verbunden annehmen wollen, und wodurch es geschehen soll, dass die an dem einen Körper angebrachten Kräfte auf die andern Körper Einfluss haben. Das Beiwort: unauflöslich, wird jedoch der Kürze willen in dem Folgenden weggelassen werden, da wir uns jede Berührung, dafern nicht das Gegentheil erinnert wird, als eine solche zu denken haben.

---

§. 190.

Grundsätze. I. Findet zwischen Kräften, welche auf mehrere mit einander verbundene Körper wirken, Gleichgewicht statt, so dauert dasselbe noch fort, wenn die gegenseitige Lage einiger oder aller dieser Körper unveränderlich gemacht wird.

Unter den Bedingungen, welche zum Gleichgewichte mit einander verbundener Körper nöthig sind, müssen folglich alle diejenigen enthalten seyn, welche erfordert werden, wenn die gegenseitige Lage einiger oder aller dieser Körper unveränderlich angenommen wird. Insbesondere müssen daher die sechs Bedingung

gleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften, welche an einem einzigen frei beweglichen Körper angebracht sind (§. 66.), auch beim Gleichgewichte zwischen Kräften statt finden, welche auf mehrere mit einander verbundene an sich frei bewegliche Körper wirken.

II. Das Gleichgewicht bei mehrern mit einander verbundenen Körpern wird nicht aufgehoben, wenn einer oder etliche derselben unbeweglich gemacht werden.

Die Bedingungen, welche zum Gleichgewichte eines zum Theil aus unbeweglichen Körpern bestehenden Systems nöthig sind, müssen daher auch dann in Erfüllung gehen, wenn man die unbeweglichen beweglich werden lässt.

III. Sind von mehrern mit einander verbundenen Körpern einer oder etliche unbeweglich, und herrscht zwischen Kräften, welche auf die beweglichen wirken, Gleichgewicht, so ist es immer möglich, an den unbeweglichen Kräfte anzubringen, dergestalt, dass, wenn die unbeweglichen gleichfalls beweglich angenommen werden, das Gleichgewicht nicht unterbrochen wird.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems, in welchem bewegliche Körper mit unbeweglichen verbunden sind, müssen daher so beschaffen seyn, dass, wenn man die unbeweglichen beweglich werden lässt, es möglich ist, an den unbeweglichen Kräfte anzubringen, welche mit den Kräften an den beweglichen das Gleichgewicht halten.

Noch ist zu bemerken, dass die in §. 4. in Bezug auf einen einzigen Körper aufgestellten Grundsätze III.

und IV. auch auf jedes System von Körpern Anwendung leiden, und dass der Grundsatz VIII. in §. 14. auch dann noch gilt, wenn die zwei Punkte, auf welche Kräfte wirken, zwei verschiedenen Körpern angehören, die dergestalt mit einander verbunden sind, dass die gegenseitige Entfernung der zwei Punkte unveränderlich ist.

§. 191.

Mit Hülfe dieser Grundsätze wollen wir nun zuvörderst das Gleichgewicht an einem Systeme von nur zwei sich berührenden frei beweglichen Körpern in Untersuchung ziehen. Der eine von ihnen sey, um von dem einfachsten Falle auszugehen, unendlich klein oder ein physischer Punkt A; den andern, in dessen Oberfläche dieser Punkt nach allen Richtungen beweglich ist, wollen wir uns Anfangs kugelförmig denken. Wirken nun auf A und der Kugel Mittelpunkt C zwei Kräfte P und R, und sind diese einander gleich, und ihre Richtungen einander direct entgegengesetzt, also normal auf der Oberfläche, so halten sie sich das Gleichgewicht, weil die gegenseitige Entfernung ihrer Angriffspunkte A und C unveränderlich ist (§. 14. VIII. u. vor. §.).

Da jede Kraft, ihrer Wirkung unbeschadet, auf jeden Punkt ihrer Richtung, der mit ihrem anfänglichen Angriffspunkte fest verbunden ist, verlegt werden kann, so wird das Gleichgewicht noch fortbestehen, wenn wir die auf C wirkende Kraft R in einem beliebigen andern Punkte des durch A zu legenden Kugeldurchmessers anbringen. Auch können wir statt derselben zwei oder mehrere andere, auf beliebige Punkte der Kugel wirkende Kräfte setzen, wenn nur von letztern

Kräften die erstere die Resultante ist. Endlich werden wir, ohne das Gleichgewicht aufzuheben, dem mit einer Kugelfläche begränzten Körper jede beliebige andere Form geben können, wenn nur das Flächenelement, in welchem sich der bewegliche Punkt A befindet, seine Lage, in welcher es von der auf A wirkenden Kraft P normal getroffen wird, beibehält; denn nur von der Lage dieses Elements der Fläche, und keines andern, kann das in Rede stehende Gleichgewicht abhängig seyn.

Zwischen mehrern an einem frei beweglichen Körper angebrachten Kräften und einer Kraft, welche auf einen in der Oberfläche des Körpers beweglichen Punkt A wirkt, herrscht demnach Gleichgewicht, wenn erstere Kräfte eine der letztern gleiche und direct entgegengesetzte Resultante haben, und wenn die Richtung der auf A wirkenden Kraft, folglich auch die Resultante der übrigen, die Oberfläche in A normal trifft.

Diese zwei Bedingungen sind aber zum Gleichgewichte nicht allein hinreichend, sondern auch nothwendig. Denn sind die Kräfte im Gleichgewichte, so wird dieses auch noch bestehen, wenn man den Punkt in der Fläche unbeweglich und somit als einen mit den Angriffspunkten der übrigen Kräfte in fester Verbindung stehenden Punkt nimmt (vor. §. I.). Alsdann aber muss, wie bei einem einzigen festen Körper, die auf den Punkt wirkende Kraft den übrigen das Gleichgewicht halten und folglich, in entgegengesetzter Richtung genommen, die Resultante der übrigen seyn.

Um die Nothwendigkeit der zweiten Bedingung zu beweisen, setze man, die Linie, in welche die Richtungen der Kraft P am Punkte A und der Resultante R

der übrigen fallen, sey nicht auf der Fläche normal, sondern beliebig gegen dieselbe geneigt. Den Punkt dieser Linie, in welchem sie die Fläche schneidet, also den Punkt der Fläche, über welchem sich A befindet, nehme man zum Angriffspunkte von R, und zerlege hierauf R nach einer auf der Fläche normalen und einer die Fläche berührenden Richtung in die Kräfte R_1 und R_2. Nach denselben Richtungen zerlege man auch P in P_1 und P_2. Wie leicht ersichtlich, erhält man hierdurch zwei Paare einander gleicher und direct entgegengesetzter Kräfte P_1 und R_1, P_2 und R_2. Von diesen sind nun P_1 und R_1 normal auf der Fläche und daher im Gleichgewichte. Sollten mithin P und R sich das Gleichgewicht halten, so müssten es auch P_2 und R_2. Dieses ist aber nicht möglich, da der in der Fläche bewegliche Punkt A und der Punkt der Fläche selbst, über welchem ersterer liegt, den tangentiellen entgegengesetzten Richtungen, nach denen sie von P_2 und R_2 getrieben werden, gleichzeitig zu folgen, durch nichts gehindert werden; folglich u. s. w.

§. 192.

Zusätze. *a.* Wenn zwischen den Kräften, welche auf den frei beweglichen Körper und den in seiner Oberfläche beweglichen Punkt wirken, Gleichgewicht herrscht, so wird dieses nicht unterbrochen, wenn wir den Körper unbeweglich werden lassen. Alsdann aber sind die an ihm angebrachten Kräfte von keiner Wirkung mehr, und wir erkennen daraus, dass, wenn auf einen in einer unbeweglichen Fläche beweglichen Punkt eine die Fläche normal treffende Kraft wirkt, keine Bewegung erfolgen kann. Und umgekehrt: Bleibt ein auf einer unbeweglichen Fläche beweglicher und der

Wirkung einer Kraft ausgesetzter Punkt in Ruhe, so ist die Richtung der Kraft auf der Fläche normal. Denn lässt man die Fläche beweglich werden, so kann man das dadurch verloren gehende Gleichgewicht durch Kräfte, welche man an der Fläche anbringt, wieder herstellen. (§. 190. III.). Dieses neue Gleichgewicht ist aber nach vor. §. nur dann möglich, wenn die auf den Punkt wirkende Kraft die Fläche normal trifft.

b. Wird umgekehrt, statt des Körpers, der Punkt unbeweglich gesetzt, und somit die Beweglichkeit des Körpers dergestalt beschränkt, dass seine Oberfläche einem unbeweglichen Punkte A zu begegnen genöthigt ist, so ergiebt sich auf ganz ähnliche Weise, wie im vorigen Falle, die zum Gleichgewichte der auf den Körper wirkenden Kräfte hinreichende und nothwendige Bedingung, dass die Kräfte eine durch den Punkt A gehende und die Oberfläche daselbst normal treffende Resultante haben.

c. Sind in der Oberfläche eines beweglichen Körpers zwei oder mehrere bewegliche Punkte A, B,..., und wirken auf jeden der Punkte eine Kraft, P auf A, Q auf B, etc. und auf den Körper mehrere Kräfte, oder nur eine, oder auch gar keine Kraft, so wird zum Gleichgewichte erfordert, dass sämmtliche Kräfte sich eben so, als wären ihre Angriffspunkte fest mit einander verbunden, das Gleichgewicht halten, und dass die Richtungen der auf die beweglichen Punkte wirkenden Kräfte die Oberfläche normal treffen.

Die Nothwendigkeit der ersten Bedingung leuchtet sogleich ein, wenn man die Punkte A, B,... mit der Oberfläche sich fest vereinigen lässt; die Nothwendigkeit der zweiten erhellet aus *a.*, wenn man die Punkte in der Oberfläche beweglich, den Körper selbst aber

unbeweglich annimmt (§. 190. II.). Die zwei Bedingungen sind aber auch die einzigen, welche zum Gleichgewichte erfordert werden. Denn sind die auf den Körper wirkenden Kräfte mit den Kräften P, Q... an den beweglichen Punkten eben so im Gleichgewichte, als wenn die Punkte an der Oberfläche fest wären, so müssen sich für erstere Kräfte den letztern gleiche, direct entgegengesetzte und auf Punkte des Körpers selbst wirkende Kräfte $-P$, $-Q$,... substituiren lassen. Da nun der zweiten Bedingung zufolge P, Q,... auf der Oberfläche normal sind, so herrscht nach §. 191. zwischen P und $-P$ besonders, zwischen Q und $-Q$ besonders etc., mithin zwischen sämmtlichen Kräften Gleichgewicht.

d. Werden die Punkte A, B,... unbeweglich angenommen, wird aber der Körper beweglich gelassen und mithin der Bedingung unterworfen, dass seine Fläche zwei oder mehreren unbeweglichen Punkten begegnet, so ist die einzige zum Gleichgewichte der auf den Körper wirkenden Kräfte nöthige Bedingung, dass es möglich seyn muss, diese Kräfte in andere zu verwandeln, deren Richtungen die unbeweglichen Punkte treffen und daselbst auf der Oberfläche normal sind.

Diese Bedingung ist hinreichend, weil nach *b.* keine der durch die Verwandlung erhaltenen normalen Kräfte Bewegung hervorbringen kann. Sie ist aber auch nöthig, weil, wenn man die Punkte wieder beweglich werden lässt, die Kräfte, welche nach §. 190. III. zur Erhaltung des Gleichgewichts an den Punkten angebracht werden können, nach *c.* auf der Fläche normal seyn und, in entgegengesetzter Richtung genommen, mit den Kräften am Körper gleiche Wirkung haben müssen.

e. Ist die Oberfläche des Körpers an einem oder mehrern unbeweglichen Punkten verschiebbar, und sind in derselben Fläche ein oder mehrere bewegliche Punkte, so ist es zum Gleichgewichte zwischen Kräften, welche an diesen beweglichen Punkten und an Punkten des Körpers selbst angebracht sind, nöthig und hinreichend, dass die Kräfte an den beweglichen Punkten die Fläche normal treffen, und dass diese Kräfte in Verbindung mit den auf den Körper unmittelbar wirkenden Kräften sich in andere verwandeln lassen, welche die Fläche in den unbeweglichen Punkten normal treffen.

Den Beweis hiervon übergehe ich, da er denen für die vorigen Fälle *c.* und *d.* ganz ähnlich ist. Ich kann aber nicht umhin, auf geometrische Folgerungen eigener Art aufmerksam zu machen, die sich aus diesem Satze ziehen lassen.

Sey die Oberfläche eines beweglichen Körpers durch einen unbeweglichen Punkt *A* zu gehen genöthigt, und in ihr ein beweglicher Punkt *B*, auf welchen eine Kraft nach parallel bleibender Richtung wirke; am Körper selbst aber sey keine Kraft angebracht. Nach letzterem Satze wird nun beim Gleichgewichte der Körper und der in seiner Fläche bewegliche Punkt *B* eine solche Lage einnehmen, dass die Richtung der Kraft auch durch *A* geht und in *A* sowohl, als in *B*, die Fläche normal trifft. In eine solche Lage aber werden der Körper und der Punkt *B* gewiss kommen, indem sonst die sich parallel bleibende Kraft ein Perpetuum mobile um den unbeweglichen Punkt *A* erzeugen würde, welches nicht möglich ist. Diess führt zu dem Schlusse:

In einer jeden in sich zurückkehrenden stetig gekrümmten Fläche giebt es wenigstens Ein Paar

von Punkten, welches die Eigenschaft besitzt, dass eine durch sie gelegte Gerade die Fläche in beiden Punkten normal trifft.

Beim Ellipsoid z. B. hat man drei solcher Paare von Punkten. Die sie verbindenden Linien sind die drei Hauptaxen; ausser ihnen giebt es keine andere die Fläche des Ellipsoids zweimal rechtwinklig schneidende Gerade.

Geht die Fläche eines Körpers durch zwei unbewegliche Punkte A und B, und wirkt auf einen in ihr beweglichen Punkt C eine Kraft nach einer sich parallel bleibenden und folglich mit AB stets denselben Winkel machenden Richtung, so ist diese Richtung, wenn der Körper in die Lage des Gleichgewichts gekommen, in C auf seiner Fläche normal, liegt mit den durch A und B zu ziehenden Normalen in einer Ebene und trifft diese Normalen in einem und demselben Punkte. Da nun der Körper in die Gleichgewichtslage gewiss kommen wird, so folgern wir:

In einer in sich zurücklaufenden stetig gekrümmten Fläche ist es immer möglich, drei Punkte dergestalt zu bestimmen, dass die durch sie zu ziehenden Normalen in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, dass der gegenseitige Abstand zweier der drei Punkte von gegebener, die grösste Sehne der Fläche nicht überschreitender, Grösse ist, und dass mit dieser Abstandslinie die Normale durch den dritten Punkt einen gegebenen Winkel macht.

Durch Annahme noch mehrerer unbeweglicher Punkte lassen sich noch einige andere Sätze dieser Art finden. Es wäre aber überflüssig, dieselben herzusetzen, da sie Jeder nach der durch die mitgetheil-

n gegebenen Anleitung leicht selbst wird entwickeln
nnen.

§. 193.

Das im vor. §. in *d.* und *e.* betrachtete Gleichge-
cht eines Körpers, dessen Fläche durch mehrere un-
wegliche Punkte zu gehen genöthigt ist, macht noch
ne besondere Erörterung nöthig. Die Bedingung die-
s Gleichgewichts war, dass für die am Körper ange-
achten Kräfte, — zu denen in *e.* noch die zu rechnen
nd, welche an den in der Oberfläche beweglichen
nkten wirken, — dass für alle diese Kräfte ein Sy-
em gleichwirkender Kräfte substituirt werden konnte,
ren Richtungen die Oberfläche normal in den unbe-
glichen Punkten trafen. Sollen aber zwei an einem
örper angebrachte Systeme von gleicher Wirkung
yn, so müssen zwischen den die Intensitäten und
chtungen der Kräfte bestimmenden Grössen sechs
leichungen erfüllt seyn (§. 66. Zus.). Soll folglich
n gegebenes System in ein anderes verwandelt wer-
n, von dessen Kräften, deren Anzahl $= n$ sey, die
ichtungen gegeben sind, so ist dieses im Allgemei-
n, wenn $n > 5$, immer möglich. Denn ist $n = 6$, so
ssen sich die 6 unbekannten Intensitäten aus jenen 6
leichungen finden; ist aber $n > 6$, so kann man von
-6 Kräften die Intensitäten willkührlich annehmen
d damit die 6 übrigen bestimmen. Wenn dagegen
< 6, so können die n Intensitäten aus den 6 Glei-
ungen eliminirt werden, und es bleiben dann $6 - n$
edingungsgleichungen zurück, welche erfüllt seyn müs-
n, wenn die Reduction des gegebenen Systems mög-
h seyn soll.

Ist demnach die Fläche eines Körpers durch n

unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt, so können für $n>5$ die auf den Körper wirkenden Kräfte immer in n andere die Fläche in den n Punkten normal treffende Kräfte verwandelt werden, deren Intensitäten für $n=6$ bestimmte Werthe erhalten, für $n>6$ aber zum Theil unbestimmt bleiben. Es herrscht folglich hier immer Gleichgewicht, welches auch die auf den Körper wirkenden Kräfte seyn mögen; oder mit andern Worten:

Ein Körper, dessen Oberfläche durch sechs oder mehrere unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt ist, ist ebenfalls unbeweglich.

Ist die Zahl n der unbeweglichen Punkte, und mithin der normalen Kräfte, kleiner als 6, so müssen $6-n$ Bedingungen zwischen den Richtungen dieser Kräfte und den Richtungen und Intensitäten der am Körper angebrachten Kräfte erfüllt werden, wenn letztere Kräfte auf erstere sollen reducirt werden können. In diesem Falle findet also nicht immer Gleichgewicht statt, d. h.:

Die Beweglichkeit eines Körpers ist nie völlig aufgehoben, wenn seine Oberfläche durch weniger als sechs unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt ist.

Werden die $6-n$ Bedingungen erfüllt, und herrscht mithin Gleichgewicht, so erhalten die normalen Kräfte bestimmte Werthe.

Diese allgemeinen Sätze sind indessen mehreren Ausnahmen unterworfen. Denn zuerst kann in gewissen Fällen auch bei 6 und noch mehreren unbeweglichen Punkten Beweglichkeit statt finden. Ist die Fläche eine Ebene, oder die Fläche einer Kugel, oder allgemeiner eine Revolutionsfläche, oder ist sie eine Schrau-

benfläche, so kann die Anzahl der unbeweglichen Punkte jede beliebige seyn, ohne dass die Beweglichkeit der Fläche aufgehoben wird; denn jede dieser Flächen ist in sich selbst verschiebbar. Analytisch giebt sich diese Beweglichkeit dadurch zu erkennen, dass die in beliebiger Zahl genommenen normalen Kräfte aus den vorhin gedachten sechs Gleichungen sich sämmtlich eliminiren lassen, und dadurch von diesen Kräften unabhängige Gleichungen hervorgehen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den ursprünglich auf den Körper wirkenden Kräften angeben.

Sodann kann es geschehen, dass auch bei 6 oder weniger unbeweglichen Punkten einige oder alle der auf sie gerichteten normalen Kräfte ihren Intensitäten nach unbestimmt bleiben. Dieser Fall tritt dann ein, wenn von den 6, 5, 4,.. normalen Richtungen einige oder alle eine solche Lage haben, dass sich Kräfte angeben lassen, welche, nach ihnen wirkend, im Gleichgewichte sind. Denn liegen z. B. bei drei Punkten die zugehörigen Normalen α, β, γ in einer Ebene und schneiden sich in einem Punkte, und hat man die gegebenen Kräfte auf drei nach α, β, γ, wirkende P, Q, R reduciren können, so sind mit ihnen die gleichfalls nach α, β, γ gerichteten $P + S \sin \beta\hat{}\gamma$, $Q + S \sin \gamma\hat{}\alpha$, $R + S \sin \alpha\hat{}\beta$ gleichwirkend, welches auch die Intensität von S seyn mag, indem die drei mit S proportionalen Kräfte sich besonders das Gleichgewicht halten.

---

§. 194.

Auf die vorhergehenden Betrachtungen über das Gleichgewicht an einem Körper und mehrern mit ihm verbundenen, theils beweglichen, theils unbeweglichen

Punkten lassen sich die nun folgenden Untersuchungen, welche das Gleichgewicht an zwei oder mehrern mit einander verbundenen Körpern zum Gegenstande haben, immer zurückführen. Denn um dies gleich an dem einfachsten Falle zu zeigen, wenn das System nur aus zwei sich mit ihren Flächen in einem Punkte berührenden frei beweglichen Körpern a und a' besteht, so kann diese Flächenberührung offenbar auch dadurch ausgedrückt werden, dass es einen Punkt A geben soll, welcher in den Flächen beider Körper zugleich beweglich ist, einen Punkt also, der, wenn wir uns ihn als ein nach allen Dimensionen unendlich kleines Körperchen denken, die Körper a und a' an der Stelle, an welcher sie ohne ihn zusammentreffen würden, um ein unendlich Geringes von einander getrennt erhält.

Seyen nun die auf die zwei Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, und lassen wir zuerst den Zwischenpunkt A, wie wir ihn nennen können, unbeweglich im Raume werden. Da hierdurch das Gleichgewicht nicht aufgehoben wird, und da die Körper nicht unmittelbar an einander, sondern an den unbeweglichen Punkt A stossen und daher ausser aller Verbindung mit einander sind, so müssen (§. 192. *b.*) die auf a wirkenden Kräfte sowohl, als die an a' angebrachten, eine in die gemeinschaftliche Normale der Flächen beider Körper fallende Resultante haben. Beide Resultanten aber müssen überdies einander gleich und entgegengesetzt seyn, damit, wenn A wieder beweglich wird, statt dessen aber die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich angenommen wird, die an ihnen, als an einem einzigen festen Körper, angebrachten Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

Diese Bedingungen sind aber nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend. Denn haben die auf a wirkenden Kräfte eine in die Normale bei A fallende Resultante P, die auf a' wirkenden eine der P gleiche und direct entgegengesetzte Resultante P', und bringt man hierauf am Zwischenpunkte A selbst zwei diesen Resultanten gleiche und entgegengesetzte Kräfte $-P$ und $-P'$ an, so halten diese letztern einander das Gleichgewicht und können daher den Zustand des Systems nicht ändern. Da aber jetzt nach §. 191. P und $-P$ für sich und eben so P' und $-P'$ besonders im Gleichgewichte sind, so ist auch das ganze System im Gleichgewichte.

§. 195.

Zwei einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte, welche an zwei sich berührenden Körpern, die eine an dem einen, die andere an dem andern Körper, im Berührungspunkte angebracht sind, und deren Richtungen in die gemeinschaftliche Normale daselbst fallen, wollen wir Gegenkräfte nennen. Zwei solcher Kräfte halten daher einander stets das Gleichgewicht, und wir können mit ihnen die vorhin erhaltenen Bedingungen für das Gleichgewicht zweier sich in einem Punkte berührenden Körper auch folgendergestalt ausdrücken:

Es muss möglich seyn, im Berührungspunkte zwei Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem Körper besonders zwischen den ursprünglich auf ihn wirkenden Kräften und der hinzugefügten Gegenkraft Gleichgewicht statt findet.

§. 196.

Auf ganz ähnliche Art lässt sich auch der allge-

meinere Fall behandeln, wenn zwei Körper a und a' sich in zwei oder mehrern Punkten $A, B, C, \ldots$ berühren, und wenn zwischen den auf sie wirkenden Kräften Gleichgewicht statt finden soll. — Man setze zuerst bei jeder Berührung einen Zwischenpunkt hinzu und lasse diese Punkte im Raume unbeweglich werden. War nun anfangs Gleichgewicht vorhanden, so kann dieses hierdurch nicht verloren gehen; vielmehr muss jetzt an jedem der beiden Körper einzeln Gleichgewicht herrschen. Mithin (§. 192. *d.*) müssen die auf a wirkenden Kräfte in andere $P, Q, R, \ldots$ und die auf a' wirkenden in andere $P', Q', R', \ldots$ verwandelt werden können, deren Richtungen in die Normalen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ der Berührungspunkte $A, B, C, \ldots$ fallen; P und P' in die Normale α; Q und Q' in die Normale β; u. s. w. Es müssen ferner, wenn wir die Unbeweglichkeit der Zwischenpunkte wieder aufheben, dagegen aber die gegenseitige Lage von a und a' unveränderlich annehmen, die ursprünglichen Kräfte, also auch diejenigen, auf welche sie reducirt worden, d. i. die nach $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gerichteten Kräfte $P+P'$, $Q+Q'$, $R+R'$, etc., als auf einen einzigen beweglichen Körper wirkend, im Gleichgewichte mit einander seyn.

Bei Verwandlung der auf a ursprünglich wirkenden Kräfte in andere $P, Q, R, \ldots$ nach den Richtungen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, erhalten nun $P, Q, R, \ldots$ entweder nur auf eine Art bestimmbare Werthe, oder nicht. Ist Ersteres der Fall, so sind $P+P'=0$, $Q+Q'=0$, etc., d. h. je zwei nach derselben Normale α, oder β etc. wirkende Kräfte sind für sich im Gleichgewichte, indem sonst, weil $P, Q, \ldots P', Q', \ldots$ zusammen im Gleichgewichte, also $P, Q, \ldots$ mit $-P', -Q', \ldots$ gleichwirkend seyn sollen, es gegen die Annahme auf zweierlei

Weise möglich wäre, die ursprünglichen Kräfte an a in andere nach einerlei Richtungen α, β, γ,... zu verwandeln, nämlich das einemal in die Kräfte P, Q,... und das anderemal in die davon verschiedenen Kräfte $-P'$, $-Q'$,.... Können dagegen eine oder etliche, z. B. zwei, von den Kräften P, Q,..., folglich auch eben so viele der mit ihnen nach denselben Richtungen gleichwirkenden $-P'$, $-Q'$,... nach Willkühr bestimmt werden, und nimmt man hierauf P, Q nach Belieben und setzt $-P' = P$, $-Q' = Q$, also $P + P' = 0$, $Q + Q' = 0$, so müssen aus demselben Grunde, wie vorhin, wo alle Kräfte bestimmte Werthe hatten, auch $-R' = R$, etc. folglich $R + R' = 0$, etc. seyn.

Als nothwendige Bedingung für das Gleichgewicht zwischen Kräften, die auf zwei sich in mehrern Punkten berührende Körper wirken, lässt sich daher jedenfalls folgende aufstellen: Es muss möglich seyn, an jedem Berührungspunkte zwei Gegenkräfte (vor. §.) ($-P$ und $-P'$ an A, $-Q$ und $-Q'$ an B, etc.) von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem der beiden Körper besonders zwischen den ursprünglichen und den jetzt an ihn hinzugefügten Kräften Gleichgewicht besteht.

Aber auch umgekehrt: Ist nach Hinzufügung von Gegenkräften jeder der beiden Körper für sich im Gleichgewichte, so müssen sie, durch Berührungen mit einander verbunden, auch ohne Gegenkräfte im Gleichgewichte seyn. Denn das Gleichgewicht der mit einander verbundenen Körper, welches nach Hinzufügung der Gegenkräfte, wegen des dadurch bewirkten Gleichgewichts jedes einzelnen, statt finden muss, kann, wenn man die Gegenkräfte paarweise nach und nach wieder entfernt, nicht verloren gehen, da je zwei zusammen-

gehörige derselben für sich im Gleichgewichte sind (§. 195.).

Zusatz. Man sieht leicht, wie die in §. 193. gemachten Bemerkungen auch hier ihre Anwendung finden. Berühren sich nämlich zwei Körper in 6 oder weniger Punkten, so haben die Intensitäten der Gegenkräfte im Allgemeinen bestimmte Werthe; unbestimmt bleiben sie bei 7, 8,... Berührungen. Ferner sind die Körper bei 5, 4,... Berührungen stets an einander verschiebbar, im Allgemeinen aber nicht mehr, wenn sie sich in 6 oder mehreren Punkten berühren, so dass, mit Ausnahme gewisser einfacher Formen der Oberflächen, bei 6, 7,... Berührungen zum Gleichgewichte nur erfordert wird, dass sich die Kräfte an beiden Körpern eben so, als wären sie nur an einem einzigen angebracht, das Gleichgewicht halten. Endlich können auch bei 6, 5,... Berührungen die Gegenkräfte unbestimmt bleiben, und zwar dann, wenn die Normalen, nach denen sie gerichtet sind, eine solche Lage gegen einander haben, dass sich Kräfte angeben lassen, welche, nach diesen Normalen wirkend, sich das Gleichgewicht halten.

§. 197.

Wir haben bisher einen jeden der beiden sich in einem oder mehreren Punkten berührenden Körper als frei beweglich angenommen. Sey jetzt der eine von ihnen unbeweglich, und es erhellet ohne Weiteres, dass, nachdem die auf den beweglichen Körper wirkenden Kräfte Bewegung zu erzeugen im Stande sind, oder nicht, weder im erstern Falle die Bewegung gehemmt, noch die im letztern herrschende Ruhe gestört wird, wenn wir, wie im Vorigen, an den Berührungsstellen

Zwischenpunkte einschieben, und diese mit dem unbeweglichen Körper fest verbunden annehmen. Die Bedingungen des Gleichgewichts im vorliegenden Falle müssen daher ganz identisch seyn mit denen (§. 192. *d.*), welche statt fanden, wenn die Fläche des Körpers durch unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt war.

Berührt demnach ein beweglicher Körper einen unbeweglichen in einem oder mehrern Punkten, so sind die auf erstern wirkenden Kräfte nur dann, und dann immer, im Gleichgewichte, wenn es möglich ist, sie in andere zu verwandeln, welche die Oberfläche des Körpers in den Berührungspunkten normal treffen. — Bei sechs und mehrern Berührungen ist diese Verwandlung im Allgemeinen immer ausführbar, und daher ein mit einem unbeweglichen in 6, 7,... Punkten durch Berührung verbundener Körper ebenfalls unbeweglich.

---

§. 198.

Ausser der bisher betrachteten Flächenberührung giebt es noch einige andere Arten, nach denen zwei Körper in einem oder mehrern Punkten einander begegnen können. Denn ist jeder der beiden Körper nicht von einer einzigen sich stetig fortziehenden Fläche begränzt, sondern ist er es von mehrern, und hat er somit Kanten und Ecken, so kann eine Begegnung der beiden Körper in einem Punkte auch darin bestehen, dass eine Ecke oder Kante des einen Körpers an eine Ecke, Kante oder Fläche des andern trifft.

Ohne zu den ersten Principien wieder zurückzukehren, können wir die Bedingungen des Gleichgewichts, die bei solchen Arten der Begegnung zweier

Körper nöthig und hinreichend sind, auch unmittelbar aus den so eben bei der Flächenberührung gefundenen Bedingungen herleiten. Sind nämlich zwei bewegliche Körper auf beliebige Weise mit ihren Ecken, Kanten und Flächen verbunden, und herrscht zwischen den auf die Körper wirkenden Kräften Gleichgewicht, so wird dieses nicht unterbrochen werden, wenn wir die zusammentreffenden Ecken und Kanten um ein unendlich Weniges abstumpfen, oder, was dasselbe ist, wenn wir auf den Ecken unendlich kleine Kugeln und längs der Kanten cylinderförmige Körper von unendlich kleinem Durchmesser befestigen. Findet aber kein Gleichgewicht statt, so wird dasselbe durch Hinzufügung der Kügelchen und sehr dünnen Cylinder auch nicht hervorgebracht werden.

Durch diese hinzugesetzten Kügelchen und Cylinder wird aber das Zusammentreffen der Körper mit Ecken und Kanten auf die Flächenberührung zurückgeführt, und es wird nun auch hier die allgemeine Bedingung des Gleichgewichts in §. 196. anwendbar, wonach es möglich seyn muss, in den Berührungspunkten Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem der beiden Körper besonders Gleichgewicht entsteht. Nur haben wir in Betreff der Richtungen dieser Gegenkräfte wegen der zum Theil unendlich kleinen Dimensionen der bei der Berührung hinzugefügten Körper Einiges zu berücksichtigen.

1) Trifft eine Kante oder Ecke des einen Körpers a mit einer Fläche des andern a' in einem Punkte zusammen, und wird hierauf längs der Kante eine unendlich dünner Cylinder, an die Ecke aber eine unendlich kleine Kugel gesetzt, so ist bei der dadurch bewirk-

ten Flächenberührung die gemeinschaftliche Normale, oder die Linie, in welcher die Gegenkräfte wirken müssen, als Normale der Fläche des Körpers a' im Berührungspunkte, vollkommen bestimmt. Dasselbe gilt auch, wenn

2) eine Kante des einen Körpers einer Kante des andern unter einem beliebigen Winkel begegnet. Denn zieht man durch den Punkt der Begegnung eine auf beiden Kanten zugleich normal stehende Gerade, so ist es diese Gerade, und keine andere, welche auch in dem Berührungspunkte der Cylinder, womit die Kanten versehen werden, auf den Cylindern normal steht. Trifft aber

3) eine Ecke des einen Körpers auf eine Kante des andern, so ist die Richtung der Gegenkräfte nicht vollkommen bestimmt. Denn heisst A der Punkt, in welchem die Ecke der Kante begegnet, so kann die Berührung der an die Ecke zu setzenden kleinen Kugel mit dem längs der Kante zu befestigenden dünnen Cylinder in irgend einem Punkte des kleinen Kreises geschehen, in welchem der Cylinder von einer in A normal auf seine Axe oder die Kante gesetzten Ebene geschnitten wird. Die Normale im Berührungspunkte oder die Richtung der Gegenkräfte ist daher irgend ein Halbmesser dieses Kreises, d. h. irgend eine der die Kante in A rechtwinklig schneidenden Geraden.

4) Ganz unabhängig von der gegenseitigen Lage der Körper ist die Richtung der Gegenkräfte, wenn Ecke mit Ecke zusammentrifft. Denn hat man die beiden Ecken mit Kügelchen versehen und lässt diese, statt der Ecken, einander berühren, so kann die Normale derselben im Berührungspunkte, mithin auch die

geringe Veränderung in der gegenseitigen Lage ihrer Theilchen zu erkennen, indem sich die Theilchen bald etwas näher gebracht, bald etwas weiter von einander entfernt werden. Diese Veränderung ist an den Stellen selbst, wo die Körper mit einander verbunden sind, am grössten, eben so, als wenn auf diese Stellen Kräfte wirkten, die das einemal eine Richtung von aussen nach innen, das anderemal von innen nach aussen haben. Man nennt eine solche Kraft im erstern Falle Druck oder Pressung, im letztern Spannung, oder begreift sie auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Pressung, indem man Spannung als negative Pressung ansieht.

Indessen muss man sich wohl hüten, diese Pressungen mit den vorigen Gegenkräften als völlig identisch zu betrachten. Die Gegenkräfte ergaben sich nicht als wirklich vorhandene Kräfte, sondern wurden nur als Hülfskräfte eingeführt, um damit die Demonstrationen zu erleichtern und die Bedingungen des Gleichgewichts einfacher darzustellen. Die Pressungen dagegen sind Kräfte, die sich beim Gleichgewichte eben so, wie jede andere Kraft, durch Veränderung der gegenseitigen Lage der Theilchen der Körper, als wirklich vorhanden offenbaren, und die daher sowohl hinsichtlich ihrer Intensitäten, als ihrer Richtungen, jederzeit vollkommen bestimmt sind, während die Intensitäten der Gegenkräfte nur bei sechs oder weniger Flächenberührungen zweier Körper, um bloss dieser Art der Begegnung zu gedenken, bestimmte Werthe haben können (§. 196. Zus.).

Soviel ist gewiss, dass im Falle des Gleichgewichts die Pressungen, welche ein Körper erleidet, eben so wohl, als die an ihm anzubringenden Gegenkräfte, mit den ursprünglich auf ihn wirkenden Kräf-

ten im Gleichgewichte seyn müssen. Sind folglich die Gegenkräfte nur auf eine Weise bestimmbar, wie dieses im Allgemeinen der Fall ist, wenn sich zwei Körper in 6 oder weniger Punkten berühren, so muss die auf jeden einzelnen Berührungspunkt wirkende Pressung der eben daselbst anzubringenden Gegenkraft gleich seyn, indem sich sonst gegen die Hypothese in den Berührungspunkten noch andere Kräfte anbringen liessen, welche mit den ursprünglichen im Gleichgewichte wären.

Berühren sich aber zwei Körper in mehr als 6 Punkten, so werden den 6, zwischen den 7 oder mehrern Gegenkräften bestehenden Gleichungen die Pressungen, statt der Gegenkräfte substituirt, zwar ebenfalls Genüge leisten. Allein es muss bei elastischen Körpern eine hinreichende Anzahl noch anderer Gleichungen geben, aus denen in Verbindung mit den vorigen sechs die Pressungen insgesammt bestimmt werden können. Die Entwicklung dieser andern Gleichungen gehört aber nicht für unsern gegenwärtigen Zweck, wo wir uns bloss mit vollkommen festen Körpern beschäftigen.

Allerdings kann man die Frage aufwerfen, ob nicht auch bei zwei sich in mehr als 6 Punkten berührenden absolut festen Körpern an den Berührungspunkten Pressungen von bestimmter Grösse statt finden, und welches ihre Werthe seyen. Indessen lässt sich auf diese Frage nicht mit Hülfe der Erfahrung und auch nicht mit Anwendung von Rechnung antworten, man müsste denn das Gesetz der Pressungen, welches bei elastischen Körpern obwaltet, auch bei vollkommener Festigkeit der Körper, als dem Grenzzustande der Elasticität, noch gelten lassen, oder irgend ein

neues Gesetz zu Hülfe nehmen, dessen Gründe aber nur metaphysisch seyn könnten.

Wie dem aber auch seyn mag, so kann uns diese Unsicherheit in Bestimmung der Pressungen wenig kümmern, da wir es im Vorliegenden nicht mit eigentlichen Pressungen, sondern nur mit Hülfskräften zu thun haben, die aber inskünftige, um dem gewöhnlichen Sprachgebrauche nicht entgegen zu seyn, statt Gegenkräfte, ebenfalls Pressungen genannt werden sollen.

Gleichgewicht an einem nicht völlig frei beweglichen Körper.

§. 201.

Die in dem Vorhergehenden entwickelte Theorie des Gleichgewichts zweier mit einander verbundenen Körper wollen wir schlüsslich durch einige Beispiele erläutern. Dabei werden wir den einen der beiden Körper als unbeweglich annehmen, indem, wenn auch er beweglich ist, zum Gleichgewichte des Ganzen nur noch erfordert wird, dass die Kräfte an beiden Körpern, als auf einen einzigen wirkend, sich das Gleichgewicht halten. (§. 199.)

Sey der bewegliche Körper mit dem unbeweglichen zuerst nur in einem Punkte verbunden. Welches nun auch diese Verbindung seyn mag, so ist die zum Gleichgewichte stets nöthige Bedingung, dass die an dem beweglichen Körper wirkenden Kräfte eine einzige den Punkt treffende Resultante haben. Ist daher in Bezug auf drei coordinirte Axen das System der auf den Körper wirkenden Kräfte, wie im Früheren, durch A, B, C, L, M, N gegeben, ist (a, b, c) der

Punkt der Begegnung und (U, V, W) die ihnt reffende Resultante der Kräfte oder die Pressung daselbst, so hat man nach §. 69. die Gleichungen:

$$A = U,\ L = bW - cV,$$
$$B = V,\ M = cU - aW,$$
$$C = W,\ N = aV - bU.$$

Hieraus die auf die Pressung sich beziehenden Grössen U, V, W eliminirt, ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$L = bC - cB,\ M = cA - aC,\ N = aB - bA,$$

oder einfacher: $L = 0,\ M = 0,\ N = 0,$

sobald der Punkt der Begegnung zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen wird. Die auf ihn ausgeübte Pressung aber ist (A, B, C). Wenn nun

1) eine Ecke, oder überhaupt ein bestimmter Punkt des beweglichen Körpers, mit einem bestimmten Punkte des unbeweglichen verbunden ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt: wenn ein bestimmter Punkt eines Körpers unbeweglich, der Körper selbst aber um ihn nach allen Richtungen drehbar ist, so kann die Richtung der Pressung jede beliebige seyn (§. 198. 4.). Die drei erhaltenen Bedingungsgleichungen L, M, $N = 0$ sind daher in diesem Falle die einzigen, d. h.

Zum Gleichgewichte eines Körpers, der einen unbeweglichen Punkt hat, ist es nöthig und hinreichend, dass in Bezug auf jede von drei sich in dem Punkte schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen das Moment der Kräfte null ist.

2) *Ist die Beweglichkeit eines Körpers dadurch beschränkt, dass ein bestimmter Punkt desselben in einer unbeweglichen Linie zu verharren, oder dass eine bestimmte Linie desselben einem unbeweglichen*

Punkte zu begegnen genöthigt ist, so wird zum Gleichgewichte erfordert, dass die Kräfte eine die Linie in dem Punkte rechtwinklig treffende Resultante haben (§. 198. 3.). Lässt man daher den Punkt, wie vorhin, mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, und die Linie, oder ihre Tangente in diesem Punkte, wenn sie krumm ist, mit der Axe der x zusammenfallen, so ist bei Annahme eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Resultante in der Ebene der yz enthalten, und daher $U=0$. Hierdurch kommt, wegen $A=U$, zu den vorigen drei Bedingungsgleichungen L, M, $N=0$ noch die vierte $A=0$, d. h. *es muss noch die Summe der nach der Linie, oder ihrer Tangente im Begegnungspunkte, geschätzten Kräfte null seyn.*

3) *Ist ein bestimmter Punkt eines Körpers in einer unbeweglichen Fläche beweglich, oder eine Fläche des Körpers einem unbeweglichen Punkte zu begegnen genöthigt*, so muss die Resultante der Kräfte die Fläche im Begegnungspunkte normal treffen. Es muss folglich, wenn der Punkt wiederum zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems genommen, und wenn die Fläche von der Ebene der x, y daselbst berührt wird, die Resultante in die Axe der z fallen, woraus U und $V=0$ folgen. Ausser den obigen Bedingungsgleichungen L, M, $N=0$, müssen daher jetzt noch die zwei: $A=0$ und $B=0$ erfüllt werden, d. h. *es muss noch die Summe der Kräfte nach irgend zwei in der Berührungsebene gezogenen und sich schneidenden Geraden geschätzt, beidemale null seyn.*

§. 202.

Wird ein Körper in zweien seiner Punkte F und F' an der Bewegung gehindert, so müssen beim Gleich-

gewichte sämmtliche Kräfte sich auf zwei diese Punkte treffende Kräfte zurückführen lassen. Nimmt man daher F' zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, $F'F$ zur Axe der x, setzt $F'F = a$ und bezeichnet die auf F und F' gerichteten Resultanten oder die Pressungen, welche diese Punkte erleiden, durch (U, V, W), (U', V', W'), so muss seyn:

$$(A)\quad \begin{cases} A = U + U', & L = 0, \\ B = V + V', & M = -aW, \\ C = W + W', & N = aV. \end{cases}$$

Wenn nun 1) F und F' völlig unbeweglich angenommen werden, so lässt sich über die Richtungen der Pressungen im Voraus nichts bestimmen, und es giebt daher zwischen $U, V, \ldots W'$ keine andern Relationen, als die, welche aus jenen Gleichungen selbst hervorgehen. Hieraus können aber bloss V, V', W, W', d. i. die in F und F' auf FF' normalen Theile der Pressungen bestimmt werden; dagegen findet sich von den längs der Linie FF' selbst gerichteten Pressungen U und U' nur die Summe, $= A$, und es bleibt $L = 0$, als die einzige von den Pressungen freie Gleichung, als Bedingung des Gleichgewichts, zurück, woraus wir schliessen:

Zum Gleichgewichte eines an einer unbeweglichen Axe (FF') befestigten Körpers ist es nöthig und hinreichend, dass das Moment der Kräfte in Bezug auf diese Axe null ist.

2) Ist nur der Punkt F' unbeweglich, F aber in einer unbeweglichen Linie beweglich, und macht die in F an diese Linie gezogene Tangente mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ, so kommt, weil die

Pressung (U, V, W) auf der Linie normal seyn muss, noch die Gleichung

$$U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma = 0$$

hinzu. Hiermit erhalten wir zu der vorigen Bedingung des Gleichgewichts $L = 0$, zwar keine neue, aber es hört nun die Unbestimmtheit von U und U' auf.

Doch ist hiervon der Fall auszunehmen, wenn $\cos\alpha = 0$ und daher die Linie auf FF' normal ist. Lassen wir alsdann gröszerer Einfachheit willen die Tangente der Linie mit der Axe der y parallel seyn, setzen also noch $\cos\gamma = 0$, so wird $V = 0$, und es entsteht noch die Bedingungsgleichung: $N = 0$; die Unbestimmtheit zwischen U und U' aber dauert fort, und wir folgern hieraus:

Ist ein Punkt F' eines Körpers unbeweglich und ein anderer Punkt F desselben in einer unbeweglichen Linie beweglich, deren Tangente FG (Fig. 50.) auf $F'F$ normal ist, so muss beim Gleichgewichte das Moment der auf den Körper wirkenden Kräfte sowohl rücksichtlich der Linie $F'F$, als rücksichtlich der auf der Ebene $F'FG$ in F' zu errichtenden Normalen $F'H$ null seyn.

Durch die Nullität des Momentes in Bezug auf $F'F'$ wird, wie in 1), die Drehung des Körpers um diese Axe aufgehoben. Es erhellet aber nicht sogleich, warum auch in Bezug auf $F'H$ das Moment null seyn soll, da doch bei der Unbeweglichkeit der Linie, in welcher F beweglich ist, der Körper sich nicht um $F'H$ drehen lässt, wenigstens nicht im Allgemeinen, sondern nur in dem speciellen Falle, wenn die Linie der Bogen eines aus F', als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser $F'F$ in der Ebene $F'FG$ beschriebenen Kreises ist. Indessen kann man doch, wenn die Linie

irgend eine andere Curve ist, die der Annahme gemäss von FG berührt wird, das bei dem Punkte F befindliche Element der Curve als das Element eines aus F' beschriebenen Kreises betrachten, und der Körper kann folglich jederzeit, wenn auch im Allgemeinen nur um ein unendlich Geringes, um $F'H$ als Axe gedreht werden. — Die Rechnung giebt uns daher ein genaueres Resultat, als wir erwartet hatten, indem sie den Körper selbst vor einer unendlich kleinen Drehung zu sichern sucht. Die Betrachtung von dergleichen unendlich kleinen Beweglichkeiten ist besonders in rein geometrischer Hinsicht von Interesse, und wir werden deshalb diesem Gegenstande späterhin eine specielle Untersuchung widmen.

3) Sind beide Punkte F und F' in gegebenen Linien beweglich, so hat man, wenn die Richtungen derselben bei F und F' durch die Winkel α, β, γ und α', β', γ' gegeben sind, nächst den 6 Gleichungen (A), noch folgende zwei:

$$U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma = 0,$$
$$U'\cos\alpha' + V'\cos\beta' + W'\cos\gamma = 0;$$

und es lassen sich jetzt nicht nur sämmtliche Pressungen vollkommen bestimmen, sondern man erhält auch noch zu $L = 0$ eine neue Bedingungsgleichung. Sind z. B. F und F' in der Axe der x, also in FF' selbst, beweglich, so werden $U = 0$, $U' = 0$, und daher $A = 0$ die neue Bedingung, d. h. die Summe der nach der Richtung von FF' geschätzten Kräfte muss null seyn.

Können die in der Axe der x befindlichen Punkte F und F' sich in Parallellinien mit der Axe der y bewegen, so sind die Pressungen parallel mit der Ebene der x, z, mithin V und $V' = 0$, und es werden damit

$B=0$, $N=0$. In diesem speciellen Falle kommen also zu $L=0$, statt einer, noch zwei Bedingungsgleichungen hinzu. Die Erfüllung der einen, $B=0$, hebt die mit der Axe der y parallele Bewegung auf; durch die andere, $N=0$, wird ähnlicherweise, wie in 2), eine hierbei noch mögliche unendlich kleine Drehung um die Axe der z gehindert.

4) Berührt der Körper mit beiden Punkten eine Ebene, z. B. die Ebene der x, y, so haben die Pressungen eine auf derselben normale Richtung; es werden folglich U, V, U', $V'=0$, und man erhält damit $A=0$, $B=0$, $L=0$, $N=0$, als Bedingungen des Gleichgewichts.

§. 203.

Betrachten wir noch einen in drei Punkten F, F', F'' an seiner Bewegung gehinderten Körper. Seyen diese Punkte: (a, b, c), $(a' b', c')$, $(0, 0, 0)$, so dass F'' der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Die Pressungen in F, F', F'' seyen (U, V, W), (U', V', W'), $(U'', V'', W'',)$ und man hat alsdann nachstehende 6 Gleichungen:

$$(B)\quad \begin{cases} A = U + U' + U'', \\ B = V + V' + V'', \\ C = W + W' + W'', \\ L = bW - cV + b'W' - c'V', \\ M = cU - aW + c'U' - a'W', \\ N = aV - bU + a'V' - b'U'. \end{cases}$$

Da sich aus ihnen allein die Pressungen nicht eliminiren lassen, so giebt es, wenn die drei Punkte unbeweglich sind, im Allgemeinen keine Bedingung des Gleichgewichts, und der Körper ist ebenfalls unbeweglich; was auch schon daraus erhellet, dass die bei zwei unbeweglichen Punkten noch übrig bleibende Axendre-

hung durch die Annahme eines dritten unbeweglichen Punktes ausserhalb der Axe vollkommen aufgehoben wird. — Die Pressungen selbst bleiben zum Theil unbestimmt.

Lässt man die Punkte in gegebenen Linien beweglich seyn, so kommen 3 neue Gleichungen zwischen den 9 Grössen $U, \ldots W''$ hinzu, und man hat somit 9 Gleichungen, aus denen man diese 9 Grössen, also die drei Pressungen ihrer Intensität und Richtung nach, bestimmen kann. Eine von den Pressungen freie Gleichung lässt sich aber damit noch nicht finden, und der Körper ist folglich auch jetzt noch unbeweglich.

Eine Ausnahme hiervon findet statt, wenn die drei Linien einander parallel sind, als wodurch der Körper selbst parallel mit ihnen beweglich wird. Lässt man sie z. B. parallel mit der Axe der z seyn, so werden $W, W', W'' = 0$, welches die Bedingung: $C = 0$ giebt, d. h. die Summe der nach den Richtungen der Parallellinien geschätzten Kräfte muss null seyn.

Wenn endlich der Körper mit den drei Punkten eine Ebene, es sey die der x, y, berührt, und folglich die Punkte in dieser Ebene beweglich sind, so hat man $c = 0$, $c' = 0$, und noch ausserdem, weil dann die Pressungen die Ebene normal treffen: $U, U', U'', V, V', V'' = 0$. Hiermit finden sich aus den Gleichungen (B) die Bedingungen: $A = 0$, $B = 0$, $N = 0$. Die drei übrigen Gleichungen werden:

$$C = W + W' + W'',$$
$$L = bW + b'W', M = -aW - a'W',$$

und hieraus lassen sich die drei auf der Ebene normalen Pressungen W, W', W'', bestimmen.

Liegen die drei Punkte, in denen der Körper die

Ebene der x, y berührt, in einer Geraden, z. B. in der Axe der x, so hat man noch b und $b' = 0$ zu setzen. Hierdurch verwandelt sich die zweite Gleichung für die Pressungen in eine vierte Bedingung fürs Gleichgewicht: $L=0$, d. h. es muss noch das Moment der Kräfte in Bezug auf die Gerade, in welcher die Punkte liegen, null seyn. Die drei Pressungen aber lassen sich aus den für sie noch übrig bleibenden zwei Gleichungen nicht mehr vollkommen bestimmen.

§. 204.

Zusatz. Wenn der Körper bloss parallel mit der Axe der z beweglich ist, so dass jeder Punkt desselben eine Parallele mit dieser Axe beschreibt, so ist nach vor. §. $C=0$ die Bedingung des Gleichgewichts. Eben so ist $A=0$ oder $B=0$ die Bedingung, wenn der Körper bloss parallel mit der Axe der x oder der y fortgerückt werden kann.

Lässt sich der Körper bloss um die Axe der x drehen, so dass jeder seiner Punkte keine andere Linie, als einen Kreis um diese Axe beschreiben kann, so ist $L=0$ die Bedingung des Gleichgewichts (§. 202.); und auf gleiche Art ist $M=0$ oder $N=0$ die Bedingung, wenn der Körper nur um die Axe der y oder der z gedreht werden kann.

Den sechs Gleichungen $A, B, C, L, M, N=0$ entsprechen daher resp. die Fortbewegungen des Körpers längs der Axen der x, y, z und die Drehungen um dieselben Axen dergestalt, dass wenn der Körper nur einer dieser sechs Bewegungen folgen kann, die derselben entsprechende Gleichung es ist, wodurch das Gleichgewicht der auf den Körper wirkenden Kräfte bedingt wird.

Diese drei fortrückenden und drei drehenden Bewegungen sind von einander vollkommen unabhängig, d. h. man kann einen Körper mit einem oder mehrern andern ganz oder zum Theil unbeweglichen Körpern immer so verbinden, dass er nur an einer dieser sechs Bewegungen, oder an etlichen derselben, welche man will, Theil nehmen, keiner der übrigen aber folgen kann.

So wie nun, wenn der Körper nur einer einzigen der 6 Bewegungen fähig ist, die dieser Bewegung entsprechende Gleichung die Bedingung des Gleichgewichts ist, so sind auch, wenn der Körper zwei oder mehrere der 6 Bewegungen zugleich annehmen kann, an den übrigen aber gehindert ist, die den möglichen Bewegungen entsprechenden Gleichungen die nöthigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichts.

Berührt z. B. ein Körper in drei Punkten, welche nicht in einer Geraden liegen, eine unbewegliche Ebene und wird diese zur Ebene der x, y genommen, so sind damit von den 6 Bewegungen aufgehoben: die mit der Axe der z parallele Fortrückung und die Drehungen um die Axen der x und der y; dagegen kann der Körper noch parallel mit den Axen der x und der y bewegt und um die Axe der z gedreht werden. Von den sechs Gleichungen, welche beim Gleichgewichte eines vollkommen frei beweglichen Körpers erfüllt seyn müssen, sind daher die drei: $C=0$, $L=0$, $M=0$, durch das Hinderniss, welches die Ebene der Bewegung des Körpers entgegenstellt, schon als erfüllt anzusehen, und es bleiben noch die drei: $A=0$, $B=0$, $N=0$, als zu erfüllende Bedingungen, übrig. Vergl. vor. §.

Ist nur ein Punkt des Körpers unbeweglich, so kann, diesen Punkt zum Anfangspunkte der Coordina-

ten genommen, der Körper um jede der drei Axen gedreht, aber keiner entlang verschoben werden. Die Bedingungen sind daher in diesem Falle: $L=0$, $M=0$, $N=0$ (§. 201.).

Kann umgekehrt der Körper um keine Axe gedreht, aber nach jeder beliebigen Richtung parallel mit seiner anfänglichen Lage fortbewegt werden, so ergeben sich auf gleiche Art: $A=0$, $B=0$, $C=0$, als Bedingungen des Gleichgewichts.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte bei einer beliebigen Anzahl mit einander verbundener Körper.

§. 205.

Durch die im vorigen Kapitel entwickelte Theorie des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf zwei mit einander verbundene Körper wirken, sind wir genugsam vorbereitet, um sogleich zur Untersuchung der Bedingungen des Gleichgewichts in dem ganz allgemeinen Falle übergehen zu können, wenn eine beliebige Anzahl mit einander verbundener Körper der Wirkung von Kräften unterworfen ist. Folgende Betrachtungen werden uns zu diesen Bedingungen hinführen.

1) Denken wir uns ein System von mehr als zwei Körpern a, b, c, d, ..., von denen jeder, wie wir fürs erste annehmen wollen, frei beweglich ist und mit einem oder mehreren oder auch allen übrigen, sey es in einem oder in mehreren Punkten, zusammentrifft. Meh-

rerer Gleichförmigkeit wegen wollen wir die Körper nur durch gegenseitiges Berühren ihrer Flächen mit einander verbunden annehmen, als worauf sich nach §. 198. alle übrigen Arten des Zusammentreffens zurückführen lassen. Endlich sollen an zwei, oder mehrern, oder allen Körpern Kräfte angebracht und soll das Ganze im Gleichgewichte seyn.

2) Man bringe an den Stellen, in denen einer der Körper, a, die andern b, c,... berührt, zwischen ihm und den andern Körpern Zwischenpunkte A, A', A'',... an (§. 194.), lasse diese unbeweglich werden und entferne hierauf den Körper a. Das Gleichgewicht wird dadurch nicht verloren gehen, da durch die unbeweglich angenommenen Zwischenpunkte aller Einfluss von a auf b, c,..., und umgekehrt, aufgehoben ist.

3) Sey b einer der von a berührten Körper und A einer der zwischen a und b gesetzten Zwischenpunkte. Nach Wegnahme von a lasse man A in der Fläche von b beweglich werden. Geht hierdurch das Gleichgewicht verloren, so muss es möglich seyn, an A eine das Gleichgewicht wieder herstellende Kraft P anzubringen (§. 190. III.), und diese Kraft muss auf der Fläche von b normal seyn, indem sonst, wenn b unbeweglich gesetzt würde, A auf b nicht in Ruhe bleiben könnte (§. 192. a.). Auch kann man die Kraft P an der Fläche von b selbst, da, wo sich A befindet, anbringen und sodann den Zwischenpunkt A, als überflüssig, wegnehmen.

4) Man entferne demnach den unbeweglichen Zwischenpunkt A und setze, wo nöthig, statt desselben eine auf b normale das Gleichgewicht herstellende Kraft P. Auf gleiche Weise entferne man nach und nach alle übrigen Zwischenpunkte A', A'',... und bringe

statt ihrer an den Flächen von b, c,..., wo sie sich befanden, d. i. an den Berührungspunkten dieser Flächen mit a, die zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthigen auf den Flächen normalen Kräfte P', P'',... an.

5) Somit sind jetzt an dem Systeme von b, c,... die ursprünglich auf diese Körper wirkenden Kräfte mit den hinzugefügten P, P',... im Gleichgewichte. Da nun bei dem Systeme sämmtlicher Körper a, b, c,... die ursprünglichen Kräfte an b, c,... mit den Kräften an a im Gleichgewichte sind, so sind die Kräfte an a mit P, P',... gleichwirkend, und es muss a für sich ins Gleichgewicht kommen, wenn an ihm noch die Kräfte P, P',..., nach entgegengesetzten Richtungen genommen, angebracht werden. Dies liefert uns folgendes Resultat:

Sind Kräfte, welche auf ein System sich berührender frei beweglicher Körper a, b, c,... wirken, im Gleichgewichte, so ist es möglich, an den Stellen, in denen irgend einer der Körper, a, die übrigen b, c,... berührt, Gegenkräfte (§. 155.) von solcher Intensität anzubringen, dass sowohl der Körper a für sich, als das System der einander berührenden Körper b, c,... für sich, in den Zustand des Gleichgewichts kommt.

6) Man bringe nun an dem Systeme von a, b, c, d,..., wie es ursprünglich gegeben war, diese Gegenkräfte wirklich an. Wegen des Gleichgewichts, welches hierdurch das System von b, c, d,... für sich erlangt, kann man gleicher Weise an den Berührungsstellen eines dieser Körper b mit den übrigen c, d,... solche Gegenkräfte hinzufügen, dass nächst a noch b für sich und das System von c, d,... für sich im Gleichgewichte sind. Durch Wiederholung desselben Verfahrens an dem Systeme von c, d,... kann man

es ferner bewirken, dass ausser *a* und *b* noch *c* für sich und das System der noch übrigen Körper *d*,... für sich ins Gleichgewicht kommen, und kann diese Operation so lange fortsetzen, bis jeder Körper des anfänglichen Systems einzeln im Gleichgewichte ist. Alsdann sind nach und nach an allen Stellen, in denen zwei Körper des Systems sich berühren, und wo es nach 3) für nöthig zu erachten war, Gegenkräfte hinzugesetzt worden, und man hat somit folgende, der in §. 196. für nur zwei Körper erhaltenen ganz analoge, Bedingung für das Gleichgewicht des Systems gefunden:

Sollen Kräfte, welche auf ein System einander berührender und an sich frei beweglicher Körper wirken, einander das Gleichgewicht halten, so muss es möglich seyn, an den Berührungsstellen der Körper Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem Körper besonders die ursprünglichen Kräfte mit den an ihm angebrachten im Gleichgewichte sind.

Dass diese nothwendige Bedingung des Gleichgewichts auch stets hinreichend ist, wird eben so, wie im §. 196. bewiesen. Lassen sich nämlich an dem Systeme der einander berührenden Körper solche Gegenkräfte hinzufügen, dass jeder einzelne Körper ins Gleichgewicht kommt, und somit auch das ganze System im Gleichgewichte ist, so muss das System auch ohne Anbringung von Gegenkräften im Gleichgewichte seyn, da je zwei zusammengehörige Gegenkräfte für sich im Gleichgewichte sind, und daher jedes dieser Paare ohne Störung des Gleichgewichts des Systems wieder entfernt werden kann.

§. 206.

Nachträgliche Bemerkungen. *a.* Nachdem bei

§. 207.

In dem Bisherigen wurde jeder Körper des Systems als frei beweglich angenommen. Setzen wir jetzt, der in §. 205. betrachtete Körper a sey unbeweglich, und somit jeder der übrigen nur innerhalb gewisser Grenzen beweglich, so erhellet eben so, wie dort, dass, wenn das System im Gleichgewichte ist, sich in den Berührungspunkten von a mit den übrigen Körpern b, c,... normale Kräfte P, P',... an b, c,... anbringen lassen, so dass diese Körper auch nach Wegnahme von a in Ruhe bleiben. Ein Gleiches gilt, wenn mehrere Körper des Systems unbeweglich angenommen werden; auch kann man mehrere unbewegliche Körper immer als Theile eines einzigen unbeweglichen betrachten. Da nun die Kräfte $-P$, $-P'$,..., an dem unbeweglichen a angebracht, von keiner Wirkung sind, so findet die in §. 205. erhaltene nothwendige Bedingung des Gleichgewichts auch bei der Unbeweglichkeit eines oder mehrerer Körper des Systems völlige Anwendung; und eben so, wie zu Ende jenes §., wird auch für gegenwärtigen Fall bewiesen, dass diese nothwendige Bedingung zugleich hinreichend ist.

Mag also jeder Körper des Systems an sich frei beweglich, oder mögen einer oder etliche derselben unbeweglich seyn, mögen sie ferner, wie bisher angenommen wurde, durch gegenseitige Berührung ihrer Flächen zusammenhängen, oder auf eine der andern in §. 198. *bemerkten Arten mit einander verbunden seyn* (§. 205. 1.), *so besteht immer die nothwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichts in der Möglichkeit, in den Begegnungspunkten der Körper Gegenkräfte* (§. 199.) *von solcher*

Intensität anzubringen, dass jeder bewegliche Körper für sich ins Gleichgewicht kommt.

Endlich ist noch zu bemerken, dass auch hier, wie in §. 200., die Gegenkräfte, wenn sie völlig bestimmte Werthe haben, die Pressungen ausdrücken, welche die Körper in den Begegnungspunkten auf einander ausüben.

Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, bei mit einander verbundenen Körpern.

§. 208.

In dem ersten Theile der Statik (§. 178.) ist bewiesen worden, dass, wenn Kräfte, die auf einen frei beweglichen Körper wirken, im Gleichgewichte sind, bei einer unendlich kleinen Verrückung des Körpers die Summe der Producte aus jeder Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes jederzeit null ist. Wir wollen nun die eben entwickelte Bedingung für das Gleichgewicht mehrerer mit einander verbundener Körper zunächst dazu benutzen, dass wir zeigen, wie jenes Princip in völliger Allgemeinheit auch bei jedem dergleichen Systeme Anwendung findet. In dieser Absicht werden wir die Gültigkeit des Princips zuerst für zwei in dem Begegnungspunkte zweier Körper angebrachte und sich immer das Gleichgewicht haltende Gegenkräfte darthun.

1) Seyen a und b zwei Körper, welche sich mit ihren Flächen in einem Punkte berühren. Heisse C (Fig. 51.) der Punkt des Raums, in welchem die Berührung statt findet, und A und B seyen die zwei in C zusammentreffenden Punkte in den Oberflächen der Körper a und b, die gemeinschaftliche Normale der beiden Flächen in dem Berührungspunkte C heisse c.

2) Werde nun das System der beiden Körper um ein unendlich Weniges verrückt, ohne dass sie sich zu berühren aufhören (§. 189.). Den Punkt des Raumes, in welchem jetzt die Berührung geschieht, nenne man C', und die jetzige Normale in der Berührung sey c'. Die beiden Punkte A und B in den Oberflächen, welche vorher mit C zusammentrafen, werden jetzt nicht mehr, wenigstens nicht im Allgemeinen, mit C' coincidiren, weil sich die eine Fläche an der andern zugleich verschoben haben kann. Seyen daher A' und B' die Stellen des Raums, welche nunmehr die Punkte A und B der Oberflächen einnehmen.

3) Weil hiernach A' und B' in den Flächen unendlich nahe bei dem Berührungspunkte C' der letztern nach der Verrückung liegen, so ist der Winkel der Geraden $A'B'$ mit c' unendlich nahe ein rechter; und weil c' mit c nur einen unendlich kleinen Winkel macht, so ist auch der Winkel von $A'B'$ mit c von einem rechten unendlich wenig verschieden. Sind folglich F und G die rechtwinkligen Projectionen von A' und B' auf c, so ist FG als verschwindend oder null gegen $A'B'$ und gegen die andern kleinen Grössen, wodurch die Verrückung bestimmt wird, zu betrachten.

4) Lassen wir nun auf die in C anfangs coincidirenden Punkte A und B der Körper zwei einander gleiche Kräfte nach entgegengesetzten in die Normale c fallenden Richtungen wirken: Diese Kräfte, welche P und $-P$ heissen, halten sich nach §. 195. das Gleichgewicht. Die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte, d. i. die Verrückungen AA' und BB' dieser Punkte, projicirt auf die Richtungen der Kräfte, sind CF und CG; folglich die Summe der Producte aus den Kräf-

ten in die virtuellen Geschwindigkeiten $= CF \cdot P - CG \cdot P = GF \cdot P = 0$.

5) Hiermit ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht zweier bei der Flächenberührung anzubringenden Gegenkräfte erwiesen. Ganz auf eben die Art wird es für zwei Gegenkräfte dargethan, die beim Zusammentreffen einer Fläche mit einer Linie oder mit einem Punkte, oder bei der Begegnung zweier Linien wirksam sind. Denn in allen diesen Fällen hat die Normallinie bei der Berührung, als in welche die Richtungen der Gegenkräfte fallen, eine durch die Elemente der Berührung vollkommen bestimmte Lage, und es wird wie vorhin gezeigt, dass die zwei anfänglich zusammenfallenden Punkte A und B nach einer unendlich kleinen Verrückung in eine Lage kommen, bei welcher ihre gegenseitige nach der Normallinie geschätzte Entfernung von einer höhern Ordnung ist.

6) Was den Fall anlangt, wenn ein bestimmter Punkt B des einen Körpers in einer bestimmten Linie des andern beweglich ist, so heisse A der Punkt der Linie, wo sich B befindet. Gelangen nun nach der Verrückung beider Körper A nach A' und B nach B', so ist $A'B'$ ein Element der Linie in ihrer zweiten Lage und steht daher auf der durch A' gelegten Normalebene dieser Linie, folglich auch auf der Normalebene durch den Punkt A der Linie in ihrer ersten Lage, unendlich nahe rechtwinklig, und die rechtwinklige Projection von $A'B'$ auf jede in dieser letztern Normalebene durch A gezogene Gerade ist von der zweiten, oder einer höhern Ordnung. Da nun von zwei auf A und B wirkenden Gegenkräften die Richtungen immer in irgend einer der durch A auf die Curve zu setzenden Normallinien liegen müssen, so ist

auch in diesem Falle die Projection von $A'B'$ auf die Richtung der Gegenkräfte jederzeit von einer höhern Ordnung, als der ersten, woraus das Uebrige, wie in 4), folgt.

7) Sind endlich A und B zwei unzertrennliche Punkte zweier Körper, so coincidiren nach der Verrückung auch A' und B'. Welches daher auch die ohne Weiteres hier noch unbestimmt bleibende Richtung der Gegenkräfte seyn mag, so fallen die Projectionen von A' und B' auf diese Richtung immer zusammen, und das Princip ist folglich auch hier gültig.

§. 209.

Seyen wiederum zwei an sich frei bewegliche Körper a und b in einem Punkte mit einander verbunden; treffe daselbst der Punkt A von a mit dem Punkte B von b zusammen, und die Art der Verbindung sey irgend eine der vorhin aufgezählten. Auf die Punkte $A_1, A_2, \ldots$ des a wirken die Kräfte $P_1, P_2, \ldots$ und auf die Punkte $B_1, B_2, \ldots$ des b die Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots$ und das System beider Körper sey im Gleichgewichte. Seyen, wie hierzu erfordert wird, P und Q die zwei in A und B anzubringenden Gegenkräfte, so dass jedes der drei Systeme: $P, P_1, P_2, \ldots$ 2) $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ 3) P, Q, für sich im Gleichgewichte ist. Wird nun der eine der beiden Körper beliebig, und der andere auf irgend eine Weise so verrückt, wie es seine Verbindungsart mit dem erstern zulässt, und bezeichnen $p, p_1, p_2, \ldots q, q_1, q_2, \ldots$ die dabei statt findenden virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte $A, A_1, A_2, \ldots B, B_1, B_2, \ldots$ so ist nach §. 178.

ten in die virtuellen Geschwindigkeiten $= CF \cdot P - CG \cdot P = GF \cdot P = 0$.

5) Hiermit ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht zweier bei der Flächenberührung anzubringenden Gegenkräfte erwiesen. Ganz auf eben die Art wird es für zwei Gegenkräfte dargethan, die beim Zusammentreffen einer Fläche mit einer Linie oder mit einem Punkte, oder bei der Begegnung zweier Linien wirksam sind. Denn in allen diesen Fällen hat die Normallinie bei der Berührung, als in welche die Richtungen der Gegenkräfte fallen, eine durch die Elemente der Berührung vollkommen bestimmte Lage, und es wird wie vorhin gezeigt, dass die zwei anfänglich zusammenfallenden Punkte A und B nach einer unendlich kleinen Verrückung in eine Lage kommen, bei welcher ihre gegenseitige nach der Normallinie geschätzte Entfernung von einer höhern Ordnung ist.

6) Was den Fall anlangt, wenn ein bestimmter Punkt B des einen Körpers in einer bestimmten Linie des andern beweglich ist, so heisse A der Punkt der Linie, wo sich B befindet. Gelangen nun nach der Verrückung beider Körper A nach A' und B nach B', so ist $A'B'$ ein Element der Linie in ihrer zweiten Lage und steht daher auf der durch A' gelegten Normalebene dieser Linie, folglich auch auf der Normalebene durch den Punkt A der Linie in ihrer ersten Lage, unendlich nahe rechtwinklig, und die rechtwinklige Projection von $A'B'$ auf jede in dieser letztern Normalebene durch A gezogene Gerade ist von der zweiten, oder einer höhern Ordnung. Da nun von zwei auf A und B wirkenden Gegenkräften die Richtungen immer in irgend einer der durch A auf die Curve zu setzenden Normallinien liegen müssen, so ist

auch in diesem Falle die Projection von $A'B'$ auf die Richtung der Gegenkräfte jederzeit von einer höhern Ordnung, als der ersten, woraus das Uebrige, wie in 4), folgt.

7) Sind endlich A und B zwei unzertrennliche Punkte zweier Körper, so coincidiren nach der Verrückung auch A' und B'. Welches daher auch die ohne Weiteres hier noch unbestimmt bleibende Richtung der Gegenkräfte seyn mag, so fallen die Projectionen von A' und B' auf diese Richtung immer zusammen, und das Princip ist folglich auch hier gültig.

§. 209.

Seyen wiederum zwei an sich frei bewegliche Körper a und b in einem Punkte mit einander verbunden; treffe daselbst der Punkt A von a mit dem Punkte B von b zusammen, und die Art der Verbindung sey irgend eine der vorhin aufgezählten. Auf die Punkte $A_1, A_2, \ldots$ des a wirken die Kräfte $P_1, P_2, \ldots$ und auf die Punkte $B_1, B_2, \ldots$ des b die Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots$ und das System beider Körper sey im Gleichgewichte. Seyen, wie hierzu erfordert wird, P und Q die zwei in A und B anzubringenden Gegenkräfte, so dass jedes der drei Systeme: $P, P_1, P_2, \ldots$ 2) $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ 3) P, Q, für sich im Gleichgewichte ist. Wird nun der eine der beiden Körper beliebig, und der andere auf irgend eine Weise so verrückt, wie es seine Verbindungsart mit dem erstern zulässt, und bezeichnen $p, p_1, p_2, \ldots q, q_1, q_2, \ldots$ die dabei statt findenden virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte $A, A_1, A_2, \ldots B, B_1, B_2, \ldots$ so ist nach §. 178.

$$Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots = 0,$$
$$Qq + Q_1q_1 + Q_2q_2 + \ldots = 0,$$
$$\text{und } 0 = Pp + Qq,$$

weil $Q = -P$, und nach vor. §. für jede Verbindungsart $p = q$ ist. Addirt man aber diese drei Gleichungen, so kommt:

$$P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots + Q_1q_1 + Q_2q_2 + \ldots = 0,$$

wodurch die Richtigkeit des Princips für zwei sich in einem Punkte begegnende Körper bewiesen ist.

Sind zwei oder mehrere Punkte A, A',... des einen Körpers mit eben so vielen B, B',... des andern auf irgend eine Weise verbunden, A mit B, A' mit B', etc. und sind resp. P, P',... Q, Q',... die an ihnen beim Gleichgewichte anzubringenden Gegenkräfte; p, p',... q, q',... aber die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte, so führt die Bedingung, dass an jedem Körper die ursprünglichen Kräfte mit den hinzugesetzten Gegenkräften im Gleichgewichte seyn müssen, zu den zwei Gleichungen:

$$Pp + P'p' + \ldots + P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots = 0,$$
$$Qq + Q'q' + \ldots + Q_1q_1 + Q_2q_2 + \ldots = 0.$$

Aus gleichem Grunde, wie vorhin, ist nun auch hier $Pp + Qq = 0$, und eben so $P'p' + Q'q' = 0$, etc. und man gelangt daher durch Addition der beiden Gleichungen zu derselben Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, wie vorhin.

Ist einer der beiden Körper, z. B. b, unbeweglich, so sind $q, q', \ldots q_1, q_2, \ldots = 0$. Hiermit wird die zweite jener Gleichungen von selbst erfüllt. Weil aber stets $p = q$, $p' = q'$, etc. so sind auch $p, p', \ldots = 0$. Hierdurch reducirt sich die erste Gleichung auf

$$P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots = 0,$$

niemals den Punkt A (§. 192. *a.*), also auch nicht das System, in Bewegung setzen; mithin können es auch nicht die mit P gleichwirkenden $P_1, P_2, \ldots$

Im dritten Falle ist $\Sigma P_1 p_1 = Pp + Qq$, und daher $Pp + Qq = 0$. Man nehme den Angriffspunkt B der Kraft Q unbeweglich an, so wird $q = 0$, folglich auch $p = 0$, d. h. die Kraft P, welche von den zweien P und Q, bei der angenommenen Unbeweglichkeit von B, allein noch thätig seyn kann, vermag keine Bewegung zu erzeugen (vor. Fall). Es muss mithin möglich seyn, an B eine Kraft Q' anzubringen, welche, wenn B wieder beweglich gesetzt und Q weggelassen wird, der P das Gleichgewicht hält (§. 190. III.). Hiernach ist $Pp + Q'q' = 0$ (§. 210.), folglich $Qq - Q'q' = 0$. Da nun Q und $-Q'$ auf einen und denselben Punkt B wirken und daher auf eine einzige Kraft reducirt werden können, so halten sie in Folge letzterer Gleichung einander das Gleichgewicht (vor. Fall); mithin sind auch $P, Q', Q, -Q'$, d. i. P und Q, also auch die damit gleichwirkenden $P_1, P_2, \ldots$ im Gleichgewichte.

II. Wenn auf zwei Körper a und b des Systems resp. die Kräfte $P_1, P_2, \ldots$ und $Q_1, Q_2, \ldots$ wirken, und $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 = 0$ ist, so herrscht Gleichgewicht.

Beweis. Man nehme b unbeweglich an, so werden $q_1, q_2, \ldots = 0$, und die Gleichung reducirt sich auf $\Sigma P_1 p_1 = 0$; mithin findet dann Gleichgewicht statt (I). Setzt man hierauf b wieder beweglich, ohne jedoch die Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots$ auf b wirken zu lassen, so muss es möglich seyn, an b eine oder zwei Kräfte Q und Q' anzubringen, wodurch das Gleichgewicht erhalten wird. Bei dem hinsichtlich seiner Beweglichkeit

wieder in den anfänglichen Zustand versetzten Systems ist daher $\Sigma P_1 p_1 + Qq + Q'q' = 0$ (§. 210.), folglich auch $\Sigma Q_1 q_1 - Qq - Q'q' = 0$, woraus wir schliessen, dass die auf b wirkenden Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots - Q, -Q'$ für sich im Gleichgewichte sind. Da es nun auch $P_1, P_2, \ldots Q, Q'$ an a und b sind, so können auch alle diese Kräfte in Vereinigung, d. i. $P_1, P_2, \ldots Q_1, Q_2, \ldots$, keine Bewegung des Systems hervorbringen.

III. Wenn auf drei Körper a, b und c des Systems die Kräfte $P_1, P_2, \ldots$; $Q_1, Q_2, \ldots$ und $R_1, R_2, \ldots$ wirken, und $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 + \Sigma R_1 r_1 = 0$ ist, so findet Gleichgewicht statt.

Beweis. Man lasse c unbeweglich werden, so werden $r_1, r_2, \ldots = 0$, also $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 = 0$, und das System ist nach vorigem Satze im Gleichgewichte. Giebt man hierauf dem c seine Beweglichkeit wieder, entfernt aber die ursprünglich auf c wirkenden Kräfte $R_1, R_2, \ldots$, so wird man das Gleichgewicht erhalten können, indem man an c zwei Kräfte R und R', oder auch nur eine, anbringt. Alsdann ist folglich bei jeder Verrückung des Systems: $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 + Rr + R'r' = 0$, mithin $\Sigma R_1 r_1 - Rr - R'r' = 0$. Es müssen daher an c die Kräfte $R_1, R_2, \ldots - R, -R'$ für sich im Gleichgewichte seyn. Hieraus aber folgt in Verbindung mit dem Gleichgewichte zwischen $P_1, P_2, \ldots Q_1, Q_2, \ldots R, R'$ das zu erweisende Gleichgewicht zwischen $P_1, P_2, \ldots Q_1, Q_2, \ldots R_1, R_2, \ldots$

IV. Wirken auf mehrere oder alle Körper des Systems Kräfte, und besteht zwischen diesen Kräften die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, so ist das System im Gleichgewichte.

Beweis. In I., II. und III. wurde dieser Satz für die speciellen Fälle dargethan, wenn auf einen, zwei,

oder drei Körper des Systems Kräfte wirken. Eben so aber, wie dabei von einem Körper auf zwei, und von zweien auf drei geschlossen wurde, so lässt sich von dreien auf vier u. s. w. und zuletzt auf alle Körper des Systems ein Schluss machen.

---

§. 213.

Aus der Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, insofern sie für einen einzigen frei beweglichen Körper galt, wurden in §. 182. und §. 184. durch Integration zwei Functionen abgeleitet, deren jede beim Zustande des Gleichgewichts ihren grössten oder kleinsten Werth erreichte. Da nun, wie jetzt erwiesen worden, die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten auch auf jedes System mit einander verbundener Körper anwendbar ist, so werden die dort gefundenen Functionen auch gegenwärtig Maxima oder Minima seyn.

Es ist daher, um nur der ersten dieser Functionen zu gedenken, *bei jedem Systeme von Körpern, welches im Zustande des Gleichgewichts sich befindet, die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes* von einer unbeweglichen auf der Richtung der Kraft normalen Ebene (§. 176. Zus.), oder, was dasselbe ist, *von einem unbeweglichen in ihrer Richtung beliebig genommenen Punkte ein Maximum oder Minimum;* d. h. bei je zwei Verrückungen, von denen die eine nach dem entgegengesetzten Sinne der andern geschieht, nimmt diese Summe zugleich ab oder zugleich zu.

Wir sahen ferner (ebend.), dass je nachdem diese Summe bei der Verrückung eines freien Körpers aus

der Lage des Gleichgewichts als Maximum oder Minimum sich darstellte, die Kräfte den Körper entweder in seine anfängliche Lage zurückzubringen, oder noch weiter davon zu entfernen strebten, und wir nannten hiernach das Gleichgewicht im erstern Falle sicher, im letztern unsicher. Dieselbe Eigenschaft des Gleichgewichts findet nun auch bei mehrern mit einander verbundenen Körpern statt. Einen sehr elementaren Beweis dieses Satzes, so wie des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten selbst, hat Lagrange gegeben *), indem er, von den einfachsten Eigenschaften des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden ausgehend, mit Hülfe eines solchen um Flaschenzüge gelegten Fadens alle auf die Körper wirkenden Kräfte durch eine einzige vertreten lässt. Einen ähnlichen Beweis enthält der folgende §., nur dass hier ausser den Sätzen vom Gleichgewichte an einem Faden noch die Lehre vom Mittelpunkte paralleler Kräfte zu Hülfe genommen worden ist.

§. 214.

Auf die Punkte A, A', A'',... (Fig. 52.) eines oder mehrerer auf irgend eine Weise mit einander verbundener Körper wirken die Kräfte P, P', P'',... nach den Richtungen AF, AF', AF'',..., so dass F, F',... beliebig in den Richtungen genommene Punkte sind. Statt nun die Kräfte auf A, A',... unmittelbar wirken zu lassen, wollen wir in F, F',... unendlich kleine unbewegliche Ringe anbringen, an den beweglichen Punkten A, A',... Fäden anknüpfen, diese resp. durch die

*) Lagrange Mécanique analytique, nouv. édit. tome I. page 23 et 71.

Ringe in F, F'... leiten und an den andern Enden G, G',... der Fäden die Kräfte P, P',... nach den verticalen Richtungen FG, $F'G'$,..., als angehängte Gewichte, wirken lassen. Denn es wird späterhin bewiesen werden, dass somit die Punkte A, A',... eben so getrieben werden, als ob an ihnen selbst die Kräfte P, P',... nach den Richtungen AF, $A'F'$,... angebracht wären. Uebrigens sollen die Punkte G, G',... in einer horizontalen Ebene enthalten seyn, so dass, wenn sie sich um ein unendlich Weniges in verticaler Richtung auf- oder niederwärts bewegen, ihre gegenseitigen Abstände GG',... als constant bleibend angesehen werden können.

Statt aber in G und G' die Gewichte P und P' anzuhängen, kann man auch G und G' durch eine steife gerade Linie verbinden und in dem Punkte H derselben, welcher der Schwerpunkt von P und P' ist, ein einziges Gewicht $Q = P + P'$ anbringen. Man thue dieses, verbinde hierauf eben so die Punkte H und G'' durch eine steife Gerade und substituire in dem Punkte I dieser Geraden, welcher der Schwerpunkt der in H und G'' befindlichen Gewichte Q und P'' ist, statt dieser Gewichte, also statt P, P' und P'', ein einziges $R = Q + P''$. Man ersetze ferner die Gewichte R und P''' durch ein Gewicht S im Punkte K, welcher in einer von I bis G''' zu legenden steifen Geraden der Schwerpunkt von R und P''' ist; und auf diese Art fahre man fort, bis man zuletzt auf ein Gewicht P_1 gekommen, welches im Schwerpunkte G_1 aller ursprünglichen P, P', P'',... angebracht, die Stelle derselben zu vertreten im Stande ist.

Findet nun zwischen den auf das System der Körper wirkenden Kräften P, P'... Gleichgewicht statt,

ıd kann daher auch das mit ihnen gleichwirkende Ge-
ıcht P_1 keine Bewegung hervorbringen, so wird,
enn man das System auf irgend eine mit der gegen-
ıitigen Verbindung der Körper verträgliche Weise
ı ein unendlich Weniges verrückt, das Gewicht P_1
ıder sinken, noch steigen. Denn sinken kann es nicht,
ıil es bei seinem Bestreben zu sinken die Verrük-
ıng, welche sein Sinken zur Folge hätte, von selbst
rvorbringen würde, was dem vorausgesetzten Gleich-
ıwichte widerstreitet. Das Gewicht kann aber auch nicht
ıigen, weil je zwei einander gerade entgegengesetzte
ırrückungen gleich gut möglich sind, und weil es
ı einer Verrückung, die derjenigen, bei welcher es
ıigt, entgegengesetzt ist, um eben so viel sinken
ırde, welches nach dem eben Bemerkten nicht mög-
ıh ist.

Die Tiefe des Gewichts P_x unter irgend einer über
m liegenden horizontalen Ebene ist daher beim Gleich-
ıwichte im Allgemeinen entweder ein Maximum, oder
ı Minimum, und zwar ersteres, wenn es, sobald das
ıstem nach demselben Sinne zu, oder nach dem ge-
de entgegengesetzten, noch weiter verrückt wird, zu
ıigen anfängt; letzteres, wenn es unter denselben
mständen zu sinken beginnt. Da es nun bei seinem
rtwährenden Streben zu sinken im erstern Falle zu
ıner anfänglichen grössten Tiefe wieder herabzukom-
en und damit das System in seine anfängliche Lage
rückzubringen strebt, im letztern dagegen sich von
ınem anfänglichen höchsten Stande und damit auch
ıs System von der Lage des Gleichgewichts immer
ehr zu entfernen sucht, so ist beim Maximum der
ıefe das Gleichgewicht sicher, und beim Minimum un-
ıher.

welche jeder Körper des Systems für sich ins Gleichgewicht gebracht wird. Man sieht aber leicht, wie diese letztern Bedingungen, und damit auch die erstern, durch Hülfe der Analysis immer gefunden werden können. Nachdem man nämlich in den Verbindungspunkten je zweier Körper zwei Gegenkräfte, als ihrer Intensität nach und auch wohl zum Theil oder ganz ihrer Richtung nach unbekannte Kräfte, in Gedanken hinzugefügt hat, stelle man für jeden einzelnen Körper die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zwischen den auf ihn unmittelbar wirkenden Kräften und den an ihm hinzugefügten Gegenkräften auf, eliminire aus diesen Gleichungen die von den Gegenkräften herrührenden unbekannten Grössen, und die somit hervorgehenden Gleichungen werden die gesuchten Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems darstellen. Nachfolgende Beispiele werden dieses Verfahren in volles Licht setzen.

§. 216.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften zu finden, welche auf vier Kugeln α, β, γ, δ wirken, von denen sich α und β, β und γ, γ und δ, δ und α berühren.

Auflösung. Seyen A, B, C, D (Fig. 53.) die Mittelpunkte von α, β, γ, δ, und F, G, H, I die vier Berührungspunkte in der gedachten Folge, so ist $AI = AF =$ dem Halbmesser von α, $BF = BG =$ dem Halbmesser von β, u. s. w. Ferner liegt F mit A und B in der gemeinschaftlichen Normale der Kugeln α und β bei ihrer Berührung in F; eben so geht die Gerade BC durch G und ist die Normale der sich in G berührenden β und γ, u. s. w. Die in F an α und β

anzubringenden Gegenkräfte, oder die Pressungen, welche α von β und β von α in F erleiden, haben demnach die Richtungen FA und FB; die Intensität jeder derselben sey a, die als negativ zu betrachten ist, wenn die Richtungen den vorigen entgegengesetzt, und daher AF und BF sind. Auf gleiche Art sey b die gemeinschaftliche Intensität der zwei in G an β und γ nach den Richtungen GB und GC anzubringenden Gegenkräfte. Dasselbe bedeuten c und d für die Berührungen in H und I.

An der Kugel α müssen nun die unmittelbar auf sie wirkenden Kräfte mit den Pressungen d und a, welche sie in I und F nach den Richtungen IA und FA erleidet, im Gleichgewichte seyn. Da aber diese Richtungen in A zusammentreffen, so müssen auch die unmittelbaren Kräfte an α sich zu einer durch A gehenden Kraft p zusammensetzen lassen. Diese Kraft p muss wegen ihres Gleichgewichts mit d und a in der Ebene DAB enthalten seyn, und es muss sich, wenn AP die Richtung derselben ist, verhalten (§. 28. *c.*):

$$(\alpha)\quad d : a : p = \sin PAB : \sin DAP : \sin DAB$$

Aus gleichen Gründen müssen die drei Systeme der auf die Kugeln β, γ, δ wirkenden Kräfte einfache Resultanten q, r, s haben, welche resp. durch B, C, D gehen und in den Ebenen ABC, BCD, CDA liegen, und es müssen, wenn BQ, CR, DS die Richtungen derselben sind, die Proportionen erfüllt werden:

$$(\beta)\quad a : b : q = \sin QBC : \sin ABQ : \sin ABC$$
$$(\gamma)\quad b : c : r = \sin RCD : \sin BCR : \sin BCD$$
$$(\delta)\quad c : d : s = \sin SDA : \sin CDS : \sin CDA.$$

Nach Elimination von a, b, c, d folgt hieraus zuerst eine Bedingungsgleichung für die Richtungen der Kräfte p, q, r, s:

$$\text{I.}\quad \frac{\sin PAB}{\sin DAP}\cdot\frac{\sin QBC}{\sin ABQ}\cdot\frac{\sin RCD}{\sin BCR}\cdot\frac{\sin SDA}{\sin CDS}=1;$$

und sodann das gegenseitige Verhältniss der Kräfte p und q:

$$\text{II.}\quad p:q=\frac{\sin DAB}{\sin DAP}:\frac{\sin ABC}{\sin QBC},$$

und eben so durch gehöriges Vertauschen der Buchstaben die Verhältnisse $q:r$ und $r:s$.

Alles dieses zusammengefasst, hat man folgende vier Bedingungen des Gleichgewichts: 1) bei jeder der vier Kugeln müssen die auf sie wirkenden Kräfte eine durch der Kugel Mittelpunkt gehende Resultante haben; 2) jede dieser Resultanten muss mit den Mittelpunkten der zwei anliegenden Kugeln in einer Ebene enthalten seyn; 3) zwischen den Richtungen der Resultanten muss noch die Relation I., und 4) zwischen den Intensitäten derselben müssen die Verhältnisse II. bestehen.

§. 217.

Zusätze. *a.* Ist eine der vier Kugeln, z. B. δ, unbeweglich, so kommt das partielle Gleichgewicht von δ nicht mehr in Rücksicht. Von den vier Proportionen $(\alpha)\ldots(\delta)$ sind daher bloss die drei ersten zu beachten, woraus sich die Verhältnisse zwischen p, q und r, wie in II. ergeben; die Bedingungsgleichung I. aber fällt weg. Auch lässt sich dann statt der Kugel δ irgend ein anderer, die Kugeln α und γ berührender, unbeweglicher Körper setzen, und die Berührungspunkte mit demselben, I und H, können auch so liegen, dass die Normalen AI und CH sich nicht mehr in einem Punkte D treffen. Begreiflich sind dann IAB und BCH die Ebenen, in welche p und r fallen müssen, und eben so hat man in den Proportionen II. bei den Winkeln DAB,

$DAP\ D$ in I und bei RCD, $BCD\ D$ in H zu verwandeln.

b. Nimmt man zwei Kugeln δ und γ unbeweglich an, oder berühren zwei bewegliche Kugeln α und β überhaupt zwei unbewegliche Flächen, oder auch nur eine, in I und G, sich selbst aber in F, so müssen beim Gleichgewichte die auf α und β wirkenden Kräfte p und q resp. durch A und B gehen und in den Ebenen IAB und ABG liegen, und es muss sich zufolge der Proportionen (α) und (β) verhalten:

$$p : q = \frac{\sin IAB}{\sin IAP} : \frac{\sin ABG}{\sin QBG}.$$

§. 218.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen vier Kräften p, q, r, s zu finden, welche auf die Ecken eines Vierecks $ABCD$ wirken, dessen Seiten von unveränderlicher Länge, dessen Winkel aber veränderlich sind.

Auflösung. Ein solches Viereck ist offenbar das von den Mittelpunkten der so eben betrachteten vier Kugeln gebildete, da bei den möglichen Veränderungen der gegenseitigen Lage der Kugeln die Winkel DAB,... im Allgemeinen sich ändern, die Seiten AB,... aber constant bleiben, indem $AB =$ der Summe der Halbmesser von α und β, u. s. w. Die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts werden daher mit den vorhin für die Kräfte p,..s gefundenen identisch seyn. Denn obschon zwischen den Seiten des Vierecks, welches von den Mittelpunkten A,...D der vier Kugeln gebildet wird, stets die Relation $AB + CD = BC + DA$ obwaltet, so begreift man doch leicht, dass diese

$$\text{I.}\quad \frac{\sin PAB}{\sin DAP}\cdot\frac{\sin QBC}{\sin ABQ}\cdot\frac{\sin RCD}{\sin BCR}\cdot\frac{\sin SDA}{\sin CDS}=1;$$

und sodann das gegenseitige Verhältniss der Kräfte p und q:

$$\text{II.}\quad p:q=\frac{\sin DAB}{\sin DAP}:\frac{\sin ABC}{\sin QBC},$$

und eben so durch gehöriges Vertauschen der Buchstaben die Verhältnisse $q:r$ und $r:s$.

Alles dieses zusammengefasst, hat man folgende vier Bedingungen des Gleichgewichts: 1) bei jeder der vier Kugeln müssen die auf sie wirkenden Kräfte eine durch der Kugel Mittelpunkt gehende Resultante haben; 2) jede dieser Resultanten muss mit den Mittelpunkten der zwei anliegenden Kugeln in einer Ebene enthalten seyn; 3) zwischen den Richtungen der Resultanten muss noch die Relation I., und 4) zwischen den Intensitäten derselben müssen die Verhältnisse II. bestehen.

§. 217.

Zusätze. *a.* Ist eine der vier Kugeln, z. B. δ, unbeweglich, so kommt das partielle Gleichgewicht von δ nicht mehr in Rücksicht. Von den vier Proportionen $(\alpha)\ldots(\delta)$ sind daher bloss die drei ersten zu beachten, woraus sich die Verhältnisse zwischen p, q und r, wie in II. ergeben; die Bedingungsgleichung I. aber fällt weg. Auch lässt sich dann statt der Kugel δ irgend ein anderer, die Kugeln α und γ berührender, unbeweglicher Körper setzen, und die Berührungspunkte mit demselben, I und H, können auch so liegen, dass die Normalen AI und CH sich nicht mehr in einem Punkte D treffen. Begreiflich sind dann IAB und BCH die Ebenen, in welche p und r fallen müssen, und eben so hat man in den Proportionen II. bei den Winkeln DAB,

B, *C*, *D*, und man wird somit zu denselben Bedingungen des Gleichgewichts des ganzen Systems, wie vorhin, geführt.

§. 219.

Zusätze. *a*. Sind das Viereck *ABCD* und die resp. durch *A*, *B*, *C* gehenden und in den Ebenen *DAB*, *ABC*, *BCD* enthaltenen Richtungen *AP*, *BQ*, *CR* von *p*, *q*, *r* willkührlich gegeben, so kann man mittelst der Gleichung I. die in der Ebene *CDA* durch *D* zu legende Richtung von *s* und mittelst der Proportionen II. die Verhältnisse zwischen den Intensitäten von *p*,...*s* finden.

Dasselbe lässt sich auch leicht durch Construction bewerkstelligen. Denn da am Punkte *A* die nach *DA*, *BA*, *AP* wirkenden Kräfte *d*, *a*, *p* im Gleichgewichte sind, so kann man mit einer willkührlich angenommenen Intensität von *p* durch Construction eines Parallelogramms (§. 28. *a*.) die Intensitäten von *d* und *a* finden. Am Punkte *B* sind die Kräfte *a*, *b*, *q* nach den Richtungen *AB*, *CB*, *BQ* im Gleichgewichte, und man erhält daher mit der gefundenen Intensität von *a* durch Construction eines zweiten Parallelogramms die Intensitäten von *b* und *q*. Auf gleiche Weise ergeben sich mit *b* am Punkte *C* die Intensitäten von *c* und *r*, und endlich am Punkte *D*, wo die nach ihrer Intensität und Richtung nun bekannten *c* und *d* mit *s* das Gleichgewicht halten, die Intensität und Richtung von *s*.

b. Da die 4 Kräfte *p*,..*s* auch dann noch im Gleichgewichte sind, wenn die Theile des Systems, worauf sie wirken, ihre gegenseitige Lage nicht ändern können, so müssen die Richtungen der Kräfte eine hyperboloidische Lage gegen einander haben, so dass jede Gerade, welche drei derselben trifft, auch der

Eigenthümlichkeit auf die Bedingungen des Gleichgewichts keinen Einfluss haben kann.

Will man unabhängig von dem Gleichgewichte der Kugeln die jetzt vorgelegte Aufgabe lösen, so betrachte man das Viereck $ABCD$ als ein System von 8 Stücken, nämlich von 4 Punkten und 4 Linien: A, AB, B, BC, C, CD, D, DA, die in der jetzt genannten Ordnung, jedes mit dem nächstfolgenden und das letzte mit dem ersten, verbunden sind. Die 4 Kräfte p, q, r, s sind nun unmittelbar an den 4 Punkten A, B, C, D angebracht, und auf die 4 Linien wirken daher bloss Pressungen, nämlich zwei auf die zwei Enden einer jeden. An jeder Linie müssen diese zwei Pressungen sich das Gleichgewicht halten und folglich einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Ist also a die Pressung, welche die Linie AB am Ende A nach der Richtung AB erfährt, so wirkt auf das andere Ende B eine Pressung a nach der Richtung BA. Gleicher Weise sey b jede der beiden Pressungen auf die Enden B und C von BC, und BC und CB seyen ihre Richtungen; u. s. w.

Nachdem somit das Gleichgewicht der 4 Linien ausgedrückt worden, ist es noch übrig, das Gleichgewicht jedes der 4 Punkte zu berücksichtigen. — Auf den mit den Linien DA und AB verbundenen Punkt A wirken nach dem Gesetze der Gegenkräfte zwei Pressungen d und a nach den Richtungen DA und BA, und diese müssen im Gleichgewichte seyn mit der an demselben Punkte unmittelbar angebrachten Kraft p. Die Richtung von p, welche AP sey, muss daher in die Ebene DAB fallen, und es muss die obige Proportion (α) statt finden. Auf ähnliche Art verhält es sich mit dem Gleichgewichte der drei übrigen Punkte

ersten durch Gerade von unveränderlicher Länge verbindet, die Winkel dieses Vierecks aber veränderlich seyn lässt.

Auf solche Weise sind die Kräfte p, q, r, s am Viereck $ABCD$ sowohl, als am Viereck $PQRS$, die Kräfte p, q, s, r an jedem der beiden Vierecke $ABSR$ und $PQDC$, und die Kräfte p, r, q, s an den Vierecken $ARQD$ und $PCBS$ im Gleichgewichte.

§. 220.

Eine nähere Betrachtung wollen wir noch dem speciellen Falle widmen, wenn das Viereck $ABCD$ ein ebenes ist. Da alsdann die Ebenen DAB, ABC, etc., in welchen die Richtungen der Kräfte enthalten seyn müssen, mit der Ebene des Vierecks zusammenfallen, so müssen auch die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieser Ebene liegen. Die Gleichungen I. oder I*. für die Richtungen und die Verhältnisse II. oder II*. zwischen den Intensitäten der Kräfte bleiben ungeändert. Indessen wird es, späterer Untersuchungen willen, nicht überflüssig seyn, von diesen Formeln für den Fall, wenn das Viereck ein ebenes ist, nachstehende Entwickelung noch beizufügen.

Bezeichnen p, q, r, s die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $p, \ldots s$ mit einer in der Ebene beliebig gezogenen Linie oder Axe machen. Gleicher Weise seyen a, b, c, d die Winkel der Linien AB, BC, CD, DA mit jener Axe und α, b, c, d die Pressungen, welche dieselben Linien $AB, \ldots$ resp. in den Enden A, B, C, D nach den Richtungen AB, $BC, \ldots$ erleiden, also $-\alpha$, $-b$, $-c$, $-d$ die Pressungen auf die andern Enden B, C, D, A der Linien $AB, \ldots$ nach denselben Richtungen $AB, \ldots$. Auf den Punkt A wir-

vierten begegnet (§. 99. *a*.). Hiermit lässt sich aus den Richtungen AP, BQ, CR die Richtung DS, ohne vorher die Verhältnisse zwischen den Kräften p, q, r und den Pressungen a, b, c, d bestimmt zu haben, folgendergestalt sehr einfach finden. — Man ziehe eine Gerade l, welche AP, BQ, CR zugleich schneidet, und sey S der Durchschnitt von l mit der Ebene CDA. Da nun l und s sich gleichfalls treffen müssen, und s in der Ebene CDA liegt, so ist DS die gesuchte Richtung von s.

Weil übrigens die Richtung der Kraft s durch die gegebenen Stücke nur auf Eine Weise bestimmt ist, so muss jede andere Gerade l', welche den dreien AP, BQ, CR zugleich begegnet, die Ebene CDA in einem Punkte der DS treffen. Dasselbe folgt auch leicht aus der Natur des hyperbolischen Hyperboloids. Eine solche Fläche kann nämlich auf doppelte Weise durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden (§. 99. *a*), so dass es zwei Systeme von Geraden giebt, deren jedes die ganze Fläche erfüllt. Jede Gerade folglich, welche drei Gerade des einen Systems trifft, schneidet auch alle übrigen Geraden desselben Systems und gehört zu den Geraden des andern Systems. Nun wird offenbar jede der drei Geraden AC, BD, l von jeder der 4 Geraden AP, BQ, CR, DS geschnitten. Nimmt man daher erstere drei als 3 Gerade des einen Systems, so gehören letztere vier zu dem andern Systeme. Jede andere Gerade l', welche AP, BQ, CR zugleich schneidet, gehört daher zum ersten Systeme und schneidet folglich auch die vierte Gerade DS des zweiten Systems, d. h. sie trifft die Ebene CDA in einem Punkte der DS.

c. Seyen P und R die Punkte, in denen BD von den in den Ebenen DAB und BCD liegenden AP

und CR geschnitten wird, und eben so werde AC von BQ und DS in Q und S geschnitten. Da also die vier hyperboloidisch gelegenen AP, BQ, CR, DS der AC in A, Q, C, S und der BD in P, B, R, D begegnen, so verhält sich (§. 102. (c)):

$$\text{I.}^* \quad \frac{AQ}{QC} : \frac{AS}{SC} = \frac{PB}{BR} : \frac{PD}{DR} = \frac{BP}{PD} : \frac{BR}{RD},$$

d. h. AC wird von den Richtungen der q, s nach demselben Doppelverhältnisse, wie BD von den Richtungen der p, r, getheilt. Und auch hiermit kann man, wenn von den Richtungen der Kräfte irgend drei, also 3 der 4 Punkte P, Q, R, S gegeben sind, den vierten Punkt und damit die Richtung der vierten Kraft finden. — Uebrigens ergiebt sich diese Proportion auch unmittelbar aus der Gleichung I. Denn es verhält sich:

$$\sin PAB : \sin DAP = \frac{BP}{AB} : \frac{PD}{AD}.$$

Aehnlicherweise kann man auch die übrigen Verhältnisse in I. ausdrücken, und wenn man alle diese Verhältnisse verbindet, so kommt man auf die Proportion I*. zurück.

Nach §. 102. hat man ferner für das Verhältniss der Kräfte p und q:

$$\frac{p}{AP} : \frac{q}{BQ} = \frac{QC}{AC} : \frac{PD}{BD}.$$

Dasselbe Verhältniss folgt auch aus den Proportionen II. Denn weil

$$\sin DAB : \sin DAP = \frac{BD}{AB} : \frac{PD}{AP},$$

$$\text{und } \sin ABC : \sin QBC = \frac{AC}{AB} : \frac{QC}{QB},$$

so verhält sich nach II.

Die entgegengesetzten Kräfte p und r sind daher einander gleich, und eben so müssen auch q und s einander gleich seyn.

Diese Gleichheit fliesst unmittelbar auch aus der nöthigen Fortdauer des Gleichgewichts, wenn die gegenseitige Lage von A, B, C, D ganz unveränderlich angenommen wird. Ueberhaupt folgt daraus, dass, wenn drei der vier Kräfte sich in einem Punkte schneiden, auch die vierte diesen Punkt treffen muss. Wird nun der Schneidepunkt der Diagonalen zu diesem Punkte genommen, so fallen die Kräfte p, r, also auch ihre Resultante, in die Diagonale AC, und die Kräfte q, s, so wie ihre Resultante, in die Diagonale BD. Diese zwei Resultanten können aber nicht anders im Gleichgewichte seyn, als wenn jede von ihnen null ist; mithin müssen p und r, und eben so q und s einander gleich und direct entgegengesetzt seyn.

3) Ist das Viereck ein Parallelogramm, so wird das Verhältniss der nach dem Mittelpunkt desselben gerichteten Kräfte:

$$(p = r) : (q = s) = AC : BD.$$

§. 224.

Auf ganz ähnliche Art, wie bei einem Vierecke, lassen sich auch bei einem mehrseitigen Vielecke, dessen Seiten von constanter Länge, die Winkel aber veränderlich sind, die Bedingungen ausdrücken, denen Kräfte, an den Ecken des Vielecks angebracht, beim Gleichgewichte unterworfen seyn müssen. Es muss nämlich jede Kraft besonders mit den zwei Pressungen im Gleichgewichte seyn, welche die Ecke des Vielecks, auf welche die Kraft zunächst wirkt, von den zwei anliegenden Seiten erleidet, und an jeder Seite müssen

sich die zwei Pressungen auf die Enden der Seite das Gleichgewicht halten. Hieraus fliessen aber die Bedingungen: dass 1) jede Kraft mit den zwei anliegenden Seiten in einer Ebene enthalten seyn muss, und dass 2), wenn jede Kraft nach den zwei anliegenden Seiten in zwei zerlegt wird, je zwei der somit entstehenden Kräfte, welche auf die beiden Enden einer Seite wirken, einander gleich und entgegengesetzt seyn müssen.

Sind daher das Vieleck und die Richtungen der Kräfte, bis auf eine, gegeben, so kann man eben so, wie in §. 219. *a.*, die noch übrige Richtung und die Verhältnisse sämmtlicher Kräfte zu einander bestimmen.

Wird bloss die noch fehlende Richtung verlangt, und ist das Vieleck in einer Ebene enthalten, so kann man ähnlicher Weise, wie in §. 221., die Richtung auch durch blosses Ziehen gerader Linien finden, woraus, da dieses immer auf mehrfache Art sich bewerkstelligen lässt, neue geometrische Sätze, das Liegen von Punkten in Geraden betreffend, hervorgehen.

Seyen z. B. das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 54.) und die Richtungen der auf A, B, C, D wirkenden Kräfte p, q, r, s gegeben, und werde die Richtung der an E anzubringenden Kraft t gesucht. Bezeichnet man der Kürze willen die Resultante von p und q mit (pq), die Resultante von p, q, r mit (pqr), u. s. w., so geht aus ähnlichem Grunde, wie beim Viereeke in §. 221.,

(pq) durch die Punkte $p \cdot q$ und $EA \cdot BC$,
(pqr) — — — $(pq) \cdot r$ und $EA \cdot CD$,
$(pqrs)$, also auch t, — — — $(pqr) \cdot s$ und E.

Hiermit kann man also nach und nach die Richtungen von (pq), (pqr) und t durch Ziehen von Ge-

raden finden. Auch kann man umgekehrt zuerst (sr), hieraus (srq) und hieraus $(srqp)$ oder t bestimmen.

Ein noch anderes Verfahren besteht darin, dass man eben so, wie (pq), noch (qr) und (rs) sucht, hierauf (pqr) durch $(pq)\cdot r$ und $p\cdot(qr)$, und (qrs) durch $(qr)\cdot s$ und $q\cdot(rs)$ legt, und endlich zwei der drei Punkte $(pqr)\cdot s$, $(pq)\cdot(rs)$, $p\cdot(qrs)$ bestimmt. Denn diese drei Punkte sind in der gesuchten Richtung von t oder $(pqrs)$ enthalten.

Die aus diesen verschiedenartigen Constructionen sich ergebenden geometrischen Sätze mit Worten auszudrücken, bleibe dem Leser überlassen.

Sehr bemerkenswerth ist es noch, dass man zu dergleichen geometrischen Sätzen auch schon durch Betrachtung eines einzigen Körpers und durch Zuhülfenahme des einzigen Satzes gelangen kann, dass sich von drei in einer Ebene liegenden und sich in einem Punkte schneidenden Geraden die eine, welche man will, als die Richtung der Resultante zweier nach den beiden andern Geraden wirkenden Kräfte ansehen lässt.

Sind also z. B. p, q, r, s irgend vier in einer Ebene enthaltene Gerade, und legt man durch die Punkte $p\cdot q$, $q\cdot r$, $r\cdot s$ in derselben Ebene willkührlich drei andere Gerade (pq), (qr), (rs), so kann man letztere immer als die Richtungen der Resultanten von Kräften betrachten, welche die Richtungen von p und q, etc. haben. Hieraus kann man, wie vorhin, die Resultanten (pqr) und (qrs) bestimmen und damit 3 Punkte finden, deren jeder in der Resultante aller 4 Kräfte liegen muss, also 3 Punkte, die in einer Geraden sind. Der hieraus entspringende geometrische Satz führt übrigens, gleich dem in §. 222. *b.*, und wie Fig. 55. zeigt, auf ein eingeschriebenes und ein umschriebenes Viel-

eck, von welchem letzteren die Diagonalen durch die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten des erstern gehen.

§. 225.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen 4 Kräften P, Q, R, S zu finden, welche auf die Seiten eines Vierecks $ABCD$ wirken, (Fig. 56.), dessen Seiten von constanter Länge, die Winkel aber veränderlich sind.

Auflösung. Seyen F, G, H, I die in den Seiten AB, BC, etc. gelegenen Angriffspunkte der Kräfte, und FK, GL, HM, IN die Richtungen der letztern. Beim Gleichgewichte des Systems wirken nun auf die Seiten DA und AB im Punkte A, in welchem sie mit einander verbunden sind, zwei einander gleiche und entgegengesetzte Pressungen, welche resp. n und $-n$ heissen. Desgleichen wirken auf AB und BC in B zwei einander gleiche und entgegengesetzte Pressungen k und $-k$. Da nun an jedem Theile des Systems die auf ihn wirkenden Kräfte und Pressungen für sich im Gleichgewichte sind, so halten an der Linie AB die Pressungen $-n$ und k der Kraft P das Gleichgewicht, und es müssen daher die Richtungen der beiden erstern der Richtung der letztern in einem und demselben Punkte begegnen. Sey K dieser Punkt, so fallen $-n$ und k, also auch n und $-k$, in AK und BK, und es erhellet aus gleichem Grunde, dass AK der IN in einem Punkte N, und BK der GL in einem Punkte L begegnen muss, und dass DN und CL sich in einem Punkte M der HM schneiden müssen. Die auf die Seiten BC und CD in C wirkenden Pressungen fallen alsdann in LM, und die Pressungen auf die Seiten CD und DA in D fallen in MN.

Eigenthümlichkeit auf die Bedingungen des Gleichgewichts keinen Einfluss haben kann.

Will man unabhängig von dem Gleichgewichte der Kugeln die jetzt vorgelegte Aufgabe lösen, so betrachte man das Viereck $ABCD$ als ein System von 8 Stücken, nämlich von 4 Punkten und 4 Linien: A, AB, B, BC, C, CD, D, DA, die in der jetzt genannten Ordnung, jedes mit dem nächstfolgenden und das letzte mit dem ersten, verbunden sind. Die 4 Kräfte p, q, r, s sind nun unmittelbar an den 4 Punkten A, B, C, D angebracht, und auf die 4 Linien wirken daher bloss Pressungen, nämlich zwei auf die zwei Enden einer jeden. An jeder Linie müssen diese zwei Pressungen sich das Gleichgewicht halten und folglich einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Ist also a die Pressung, welche die Linie AB am Ende A nach der Richtung AB erfährt, so wirkt auf das andere Ende B eine Pressung a nach der Richtung BA. Gleicher Weise sey b jede der beiden Pressungen auf die Enden B und C von BC, und BC und CB seyen ihre Richtungen; u. s. w.

Nachdem somit das Gleichgewicht der 4 Linien ausgedrückt worden, ist es noch übrig, das Gleichgewicht jedes der 4 Punkte zu berücksichtigen. — Auf den mit den Linien DA und AB verbundenen Punkt A wirken nach dem Gesetze der Gegenkräfte zwei Pressungen d und a nach den Richtungen DA und BA, und diese müssen im Gleichgewichte seyn mit der an demselben Punkte unmittelbar angebrachten Kraft p. Die Richtung von p, welche AP sey, muss daher in die Ebene DAB fallen, und es muss die obige Proportion (α) statt finden. Auf ähnliche Art verhält es sich mit dem Gleichgewichte der drei übrigen Punkte

B, *C*, *D*, und man wird somit zu denselben Bedingungen des Gleichgewichts des ganzen Systems, wie vorhin, geführt.

§. 219.

Zusätze. *a.* Sind das Viereck *ABCD* und die resp. durch *A*, *B*, *C* gehenden und in den Ebenen *DAB*, *ABC*, *BCD* enthaltenen Richtungen *AP*, *BQ*, *CR* von *p*, *q*, *r* willkührlich gegeben, so kann man mittelst der Gleichung I. die in der Ebene *CDA* durch *D* zu legende Richtung von *s* und mittelst der Proportionen II. die Verhältnisse zwischen den Intensitäten von *p*, . . *s* finden.

Dasselbe lässt sich auch leicht durch Construction bewerkstelligen. Denn da am Punkte *A* die nach *DA*, *BA*, *AP* wirkenden Kräfte *d*, *a*, *p* im Gleichgewichte sind, so kann man mit einer willkührlich angenommenen Intensität von *p* durch Construction eines Parallelogramms (§. 28. *a.*) die Intensitäten von *d* und *a* finden. Am Punkte *B* sind die Kräfte *a*, *b*, *q* nach den Richtungen *AB*, *CB*, *BQ* im Gleichgewichte, und man erhält daher mit der gefundenen Intensität von *a* durch Construction eines zweiten Parallelogramms die Intensitäten von *b* und *q*. Auf gleiche Weise ergeben sich mit *b* am Punkte *C* die Intensitäten von *c* und *r*, und endlich am Punkte *D*, wo die nach ihrer Intensität und Richtung nun bekannten *c* und *d* mit *s* das Gleichgewicht halten, die Intensität und Richtung von *s*.

b. Da die 4 Kräfte *p*, . . *s* auch dann noch im Gleichgewichte sind, wenn die Theile des Systems, worauf sie wirken, ihre gegenseitige Lage nicht ändern können, so müssen die Richtungen der Kräfte eine hyperboloidische Lage gegen einander haben, so dass jede Gerade, welche drei derselben trifft, auch der

vierten begegnet (§. 99. a.). Hiermit lässt sich aus den Richtungen AP, BQ, CR die Richtung DS, ohne vorher die Verhältnisse zwischen den Kräften p, q, r und den Pressungen a, b, c, d bestimmt zu haben, folgendergestalt sehr einfach finden. — Man ziehe eine Gerade l, welche AP, BQ, CR zugleich schneidet, und sey S der Durchschnitt von l mit der Ebene CDA. Da nun s und l sich gleichfalls treffen müssen, und s in der Ebene CDA liegt, so ist DS die gesuchte Richtung von s.

Weil übrigens die Richtung der Kraft s durch die gegebenen Stücke nur auf Eine Weise bestimmt ist, so muss jede andere Gerade l, welche den dreien AP, BQ, CR zugleich begegnet, die Ebene CDA in einem Punkte der DS treffen. Dasselbe folgt auch leicht aus der Natur des hyperbolischen Hyperboloids. Eine solche Fläche kann nämlich auf doppelte Weise durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden (§. 96. a.), in dem es eine Systeme von Geraden giebt, deren jedes die ganze Fläche erfüllt. Jede Gerade folglich, welche die Gerade des einen Systems trifft, schneidet auch alle übrigen Geraden desselben Systems und gehört zu den Geraden des andern Systems. Nun wird offenbar jede der drei Geraden AC, BD, l von jeder der 3 Geraden AP, BQ, CR, DS geschnitten. Nimmt man daher erstere drei als 3 Gerade des einen Systems, so gehören letztere vier zu dem andern Systeme. Jede andere Gerade l, welche AP, BQ, CR zugleich schneidet, gehört daher zum ersten Systeme und schneidet folglich auch die vierte Gerade DS des zweiten Systems. Es trifft die Ebene CDA in einem Punkte der DS.

Seyen P und R die Punkte, in denen BD von den in den Ebenen DAB und BCD liegenden AP

und s sich in einem Punkte der Diagonale AC begegnen, und daher S mit Q zusammenfällt, so wird

$$AQ : QC = AS : SC, \text{ mithin}$$

zufolge I°. auch.... $BP : PD = BR : RD$;

es fallen daher auch P und R zusammen, d. h. die auf A und C wirkenden Kräfte p und r schneiden sich alsdann in einem Punkte der Diagonale BD.

Dasselbe folgt, wenn das Viereck kein ebenes ist, schon daraus, dass sich die Kräfte, wie an einem einzigen Körper, das Gleichgewicht halten müssen. Denn fällt S mit Q zusammen, so haben s und q eine durch Q gehende Resultante. Mithin müssen sich auch p und r zu einer, dieser Resultante gleichen und entgegengesetzten Kraft vereinigen lassen, und folglich in einer Ebene liegen. Schneidet nun diese Ebene die Diagonale BD im Punkte P, so sind, weil p und r resp. in den Ebenen DAB und BCD liegen müssen, AP und CP die Richtungen von p und r.

2) Ist das Viereck ein ebenes, und gehen die Richtungen dreier der vier Kräfte durch den Durchschnitt Z der Diagonalen, so muss nach vorigem Satze auch die Richtung der vierten diesen Durchschnitt treffen. Alsdann sind p und r, so wie q und s einander direct entgegengesetzt, die 4 Punkte P, Q, R, S coincidiren mit Z und es verhalten sich nach II°:

$$p : q = \frac{AZ \cdot ZC}{AC} : \frac{BZ \cdot ZD}{BD},$$

$$\text{oder: } \frac{1}{p} : \frac{1}{q} = \frac{1}{AZ} + \frac{1}{ZC} : \frac{1}{BZ} + \frac{1}{ZD},$$

und eben so $\frac{1}{q} : \frac{1}{r} = \frac{1}{BZ} + \frac{1}{ZD} : \frac{1}{CZ} + \frac{1}{ZA}$.

Die entgegengesetzten Kräfte p und r sind daher einander gleich, und eben so müssen auch q und s einander gleich seyn.

Diese Gleichheit fliesst unmittelbar auch aus der nöthigen Fortdauer des Gleichgewichts, wenn die gegenseitige Lage von A, B, C, D ganz unveränderlich angenommen wird. Ueberhaupt folgt daraus, dass, wenn drei der vier Kräfte sich in einem Punkte schneiden, auch die vierte diesen Punkt treffen muss. Wird nun der Schneidepunkt der Diagonalen zu diesem Punkte genommen, so fallen die Kräfte p, r, also auch ihre Resultante, in die Diagonale AC, und die Kräfte q, s, so wie ihre Resultante, in die Diagonale BD. Diese zwei Resultanten können aber nicht anders im Gleichgewichte seyn, als wenn jede von ihnen null ist; mithin müssen p und r, und eben so q und s einander gleich und direct entgegengesetzt seyn.

3) Ist das Viereck ein Parallelogramm, so wird das Verhältniss der nach dem Mittelpunkt desselben gerichteten Kräfte:

$$(p = r) : (q = s) = AC : BD.$$

§. 224.

Auf ganz ähnliche Art, wie bei einem Vierecke, lassen sich auch bei einem mehrseitigen Vielecke, dessen Seiten von constanter Länge, die Winkel aber veränderlich sind, die Bedingungen ausdrücken, denen Kräfte, an den Ecken des Vielecks angebracht, beim Gleichgewichte unterworfen seyn müssen. Es muss nämlich jede Kraft besonders mit den zwei Pressungen im Gleichgewichte seyn, welche die Ecke des Vielecks, auf welche die Kraft zunächst wirkt, von den zwei anliegenden Seiten erleidet, und an jeder Seite müssen

ersten durch Gerade von unveränderlicher Länge verbindet, die Winkel dieses Vierecks aber veränderlich seyn lässt.

Auf solche Weise sind die Kräfte p, q, r, s am Vierecke $ABCD$ sowohl, als am Vierecke $PQRS$, die Kräfte p, q, s, r an jedem der beiden Vierecke $ABSR$ und $PQDC$, und die Kräfte p, r, q, s an den Vierecken $ARQD$ und $PCBS$ im Gleichgewichte.

§. 220.

Eine nähere Betrachtung wollen wir noch dem speciellen Falle widmen, wenn das Viereck $ABCD$ ein ebenes ist. Da alsdann die Ebenen DAB, ABC, etc., in welchen die Richtungen der Kräfte enthalten seyn müssen, mit der Ebene des Vierecks zusammenfallen, so müssen auch die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieser Ebene liegen. Die Gleichungen I. oder I*. für die Richtungen und die Verhältnisse II. oder II*. zwischen den Intensitäten der Kräfte bleiben ungeändert. Indessen wird es, späterer Untersuchungen willen, nicht überflüssig seyn, von diesen Formeln für den Fall, wenn das Viereck ein ebenes ist, nachstehende Entwickelung noch beizufügen.

Bezeichnen p, q, r, s die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $p, \ldots s$ mit einer in der Ebene beliebig gezogenen Linie oder Axe machen. Gleicher Weise seyen a, b, c, d die Winkel der Linien AB, BC, CD, DA mit jener Axe und a, b, c, d die Pressungen, welche dieselben Linien $AB, \ldots$ resp. in den Enden A, B, C, D nach den Richtungen $AB, BC, \ldots$ erleiden, also $-a, -b, -c, -d$ die Pressungen auf die andern Enden B, C, D, A der Linien $AB, \ldots$ nach denselben Richtungen $AB, \ldots$. Auf den Punkt A wir-

raden finden. Auch kann man umgekehrt zuerst (sr), hieraus (srq) und hieraus $(srqp)$ oder t bestimmen.

Ein noch anderes Verfahren besteht darin, dass man eben so, wie (pq), noch (qr) und (rs) sucht, hierauf (pqr) durch $(pq)\cdot r$ und $p\cdot(qr)$, und (qrs) durch $(qr)\cdot s$ und $q\cdot(rs)$ legt, und endlich zwei der drei Punkte $(pqr)\cdot s$, $(pq)\cdot(rs)$, $p\cdot(qrs)$ bestimmt. Denn diese drei Punkte sind in der gesuchten Richtung von t oder $(pqrs)$ enthalten.

Die aus diesen verschiedenartigen Constructionen sich ergebenden geometrischen Sätze mit Worten auszudrücken, bleibe dem Leser überlassen.

Sehr bemerkenswerth ist es noch, dass man zu dergleichen geometrischen Sätzen auch schon durch Betrachtung eines einzigen Körpers und durch Zuhülfenahme des einzigen Satzes gelangen kann, dass sich von drei in einer Ebene liegenden und sich in einem Punkte schneidenden Geraden die eine, welche man will, als die Richtung der Resultante zweier nach den beiden andern Geraden wirkenden Kräfte ansehen lässt.

Sind also z. B. p, q, r, s irgend vier in einer Ebene enthaltene Gerade, und legt man durch die Punkte $p\cdot q$, $q\cdot r$, $r\cdot s$ in derselben Ebene willkührlich drei andere Gerade (pq), (qr), (rs), so kann man letztere immer als die Richtungen der Resultanten von Kräften betrachten, welche die Richtungen von p und q, etc. haben. Hieraus kann man, wie vorhin, die Resultanten (pqr) und (qrs) bestimmen und damit 3 Punkte finden, deren jeder in der Resultante aller 4 Kräfte liegen muss, also 3 Punkte, die in einer Geraden sind. Der hieraus entspringende geometrische Satz führt übrigens, gleich dem in §. 222. *b.*, und wie Fig. 55. zeigt, auf ein eingeschriebenes und ein umschriebenes Viel-

ersten durch Gerade von unveränderlicher Länge verbindet, die Winkel dieses Vierecks aber veränderlich seyn lässt.

Auf solche Weise sind die Kräfte p, q, r, s am Vierecke $ABCD$ sowohl, als am Vierecke $PQRS$, die Kräfte p, q, s, r an jedem der beiden Vierecke $ABSR$ und $PQDC$, und die Kräfte p, r, q, s an den Vierecken $ARQD$ und $PCBS$ im Gleichgewichte.

§. 220.

Eine nähere Betrachtung wollen wir noch dem speciellen Falle widmen, wenn das Viereck $ABCD$ ein ebenes ist. Da alsdann die Ebenen DAB, ABC, etc., in welchen die Richtungen der Kräfte enthalten seyn müssen, mit der Ebene des Vierecks zusammenfallen, so müssen auch die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieser Ebene liegen. Die Gleichungen I. oder I*. für die Richtungen und die Verhältnisse II. oder II*. zwischen den Intensitäten der Kräfte bleiben ungeändert. Indessen wird es, späterer Untersuchungen willen, nicht überflüssig seyn, von diesen Formeln für den Fall, wenn das Viereck ein ebenes ist, nachstehende Entwickelung noch beizufügen.

Bezeichnen p, q, r, s die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $p, \ldots s$ mit einer in der Ebene beliebig gezogenen Linie oder Axe machen. Gleicher Weise seyen a, b, c, d die Winkel der Linien AB, BC, CD, DA mit jener Axe und a, b, c, d die Pressungen, welche dieselben Linien $AB, \ldots$ resp. in den Enden A, B, C, D nach den Richtungen $AB, BC, \ldots$ erleiden, also $-a, -b, -c, -d$ die Pressungen auf die andern Enden B, C, D, A der Linien $AB, \ldots$ nach denselben Richtungen $AB, \ldots$. Auf den Punkt A wir-

Die 1ste Bedingung des Gleichgewichts beruht demnach auf der Möglichkeit, ein Viereck *KLMN* zu verzeichnen, dessen Seiten durch die Ecken des Vierecks *ABCD* gehen, und dessen Ecken in den Richtungen *FK*, *GL*,... der Kräfte liegen. — Denkt man sich das Viereck *ABCD* und die Richtungen *FK*,... gegeben, und ist die Figur in einer Ebene enthalten, so führt die Forderung, das Viereck *KLMN* zu beschreiben, zu einer Gleichung des zweiten Grades und ist daher im Allgemeinen entweder auf doppelte Weise, oder gar nicht erfüllbar. Ist aber die Figur nicht eben, so ist die Construction von *KLMN* nur bei gewissen speciellen Lagen der Richtungen *FK*,... gegen das Viereck *ABCD* möglich. Da ferner durch Zerlegung der durch die Ecken des Vierecks *KLMN* gehenden Kräfte *P*, *Q*, *R*, *S* nach den Seiten desselben Vierecks die auf *A*, *B*, *C*, *D* wirkenden Pressungen sich ergeben, — z. B. durch Zerlegung der nach *FK* gerichteten Kraft *P* nach den Seiten *NK* und *KL* die Pressungen *n* und *k*, — und da je zwei dieser Pressungen, welche in dieselbe Seite fallen, sich gegenseitig aufheben, so ist die zweite Bedingung des Gleichgewichts: dass, wenn man die Seitenlängen des Vierecks *KLMN* constant und die Winkel desselben veränderlich annimmt, die Kräfte *P*,..*S*, an den Spitzen dieses Vierecks angebracht, im Gleichgewichte sind. Es müssen daher (§. 219. *d*.)

2) wenn die gegenseitige Lage der Theile, worauf die Kräfte wirken, unveränderlich angenommen wird, die Kräfte im Gleichgewichte seyn; und diese Bedingung reicht hin, wenn das Viereck *KLMN* nicht eben ist. Denn die alsdann noch nöthige Bedingung, dass die Richtungen *FK*, *GL*,... resp. in die Ebenen

ersten durch Gerade von unveränderlicher Länge verbindet, die Winkel dieses Vierecks aber veränderlich seyn lässt.

Auf solche Weise sind die Kräfte p, q, r, s am Vierecke $ABCD$ sowohl, als am Vierecke $PQRS$, die Kräfte p, q, s, r an jedem der beiden Vierecke $ABSR$ und $PQDC$, und die Kräfte p, r, q, s an den Vierecken $ARQD$ und $PCBS$ im Gleichgewichte.

§. 220.

Eine nähere Betrachtung wollen wir noch dem speciellen Falle widmen, wenn das Viereck $ABCD$ ein ebenes ist. Da alsdann die Ebenen DAB, ABC, etc., in welchen die Richtungen der Kräfte enthalten seyn müssen, mit der Ebene des Vierecks zusammenfallen, so müssen auch die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieser Ebene liegen. Die Gleichungen I. oder I*. für die Richtungen und die Verhältnisse II. oder II*. zwischen den Intensitäten der Kräfte bleiben ungeändert. Indessen wird es, späterer Untersuchungen willen, nicht überflüssig seyn, von diesen Formeln für den Fall, wenn das Viereck ein ebenes ist, nachstehende Entwickelung noch beizufügen.

Bezeichnen p, q, r, s die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $p, \ldots s$ mit einer in der Ebene beliebig gezogenen Linie oder Axe machen. Gleicher Weise seyen a, b, c, d die Winkel der Linien AB, BC, CD, DA mit jener Axe und a, b, c, d die Pressungen, welche dieselben Linien $AB, \ldots$ resp. in den Enden A, B, C, D nach den Richtungen AB, $BC, \ldots$ erleiden, also $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ die Pressungen auf die andern Enden B, C, D, A der Linien $AB, \ldots$ nach denselben Richtungen $AB, \ldots$. Auf den Punkt A wir-

AB wirkende Kräfte $\frac{a_2}{a} P$ und $\frac{a_1}{a} P$ (§. 26. *c.*). Eben so setze man statt der in I angebrachten Kraft S zwei ihr parallele auf D und A wirkende Kräfte $\frac{d_2}{d} S$ und $\frac{d_1}{d} S$, und verfahre auf gleiche Art mit den Kräften Q und R.

Werden daher noch die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P, Q, R, S und die Linien AB, BC, CD, DA mit einer willkührlich in der Ebene gezogenen Axe machen, resp. mit P, Q, R, S und a, b, c, d bezeichnet, so wirken jetzt auf A die zwei Kräfte $S \frac{d_1}{d}$ und $P \frac{a_2}{a}$ nach den durch die Winkel S und P bestimmten Richtungen, auf B die Kräfte $P \frac{a_1}{a}$ und $Q \frac{b_2}{b}$ nach den durch P und Q bestimmten Richtungen etc., und hat man zu Folge der Gleichung am Ende von §. 220., wenn statt der dortigen Kräfte p, p', q, q' resp. $S\frac{d_1}{d}, P\frac{a_2}{a}, P\frac{a_1}{a}, Q\frac{b_2}{b}$, und statt der dortigen Winkel p, p', q, q' resp. S, P, P, Q gesetzt werden:

$$S\frac{d_1}{d}\frac{\sin(S-d)}{\sin(a-d)} + P\left(\frac{a_2}{a}\frac{\sin(P-d)}{\sin(a-d)} + \frac{a_1}{a}\frac{\sin(P-b)}{\sin(a-b)}\right) + Q\frac{b_2}{b}\frac{\sin(Q-b)}{\sin(a-b)} = 0,$$

und eben so noch drei andere Gleichungen, welche auch schon aus dieser durch gehörige Verwandlung der Buchstaben in die nächstfolgenden hervorgehen und mit ihr die Bedingungen des Gleichgewichts ausmachen.

Da in diesen vier Gleichungen nicht die Seiten des

ersten durch Gerade von unveränderlicher Länge verbindet, die Winkel dieses Vierecks aber veränderlich seyn lässt.

Auf solche Weise sind die Kräfte p, q, r, s am Vierecke $ABCD$ sowohl, als am Vierecke $PQRS$, die Kräfte p, q, s, r an jedem der beiden Vierecke $ABSR$ und $PQDC$, und die Kräfte p, r, q, s an den Vierecken $ARQD$ und $PCBS$ im Gleichgewichte.

§. 220.

Eine nähere Betrachtung wollen wir noch dem speciellen Falle widmen, wenn das Viereck $ABCD$ ein ebenes ist. Da alsdann die Ebenen DAB, ABC, etc., in welchen die Richtungen der Kräfte enthalten seyn müssen, mit der Ebene des Vierecks zusammenfallen, so müssen auch die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieser Ebene liegen. Die Gleichungen I. oder I*. für die Richtungen und die Verhältnisse II. oder II*. zwischen den Intensitäten der Kräfte bleiben ungeändert. Indessen wird es, späterer Untersuchungen willen, nicht überflüssig seyn, von diesen Formeln für den Fall, wenn das Viereck ein ebenes ist, nachstehende Entwickelung noch beizufügen.

Bezeichnen p, q, r, s die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $p, \ldots s$ mit einer in der Ebene beliebig gezogenen Linie oder Axe machen. Gleicher Weise seyen a, b, c, d die Winkel der Linien AB, BC, CD, DA mit jener Axe und a, b, c, d die Pressungen, welche dieselben Linien $AB, \ldots$ resp. in den Enden A, B, C, D nach den Richtungen $AB, BC, \ldots$ erleiden, also $-a, -b, -c, -d$ die Pressungen auf die andern Enden B, C, D, A der Linien $AB, \ldots$ nach denselben Richtungen $AB, \ldots$. Auf den Punkt A wir-

AB wirkende Kräfte $\frac{a_2}{a}P$ und $\frac{a_1}{a}P$ (§. 26. *c.*). Eben so setze man statt der in I angebrachten Kraft S zwei ihr parallele auf D und A wirkende Kräfte $\frac{d_2}{d}S$ und $\frac{d_1}{d}S$, und verfahre auf gleiche Art mit den Kräften Q und R.

Werden daher noch die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P, Q, R, S und die Linien AB, BC, CD, DA mit einer willkührlich in der Ebene gezogenen Axe machen, resp. mit P, Q, R, S und a, b, c, d bezeichnet, so wirken jetzt auf A die zwei Kräfte $S\frac{d_1}{d}$ und $P\frac{a_2}{a}$ nach den durch die Winkel S und P bestimmten Richtungen, auf B die Kräfte $P\frac{a_1}{a}$ und $Q\frac{b_2}{b}$ nach den durch P und Q bestimmten Richtungen etc., und hat man zu Folge der Gleichung am Ende von §. 220., wenn statt der dortigen Kräfte p, p', q, q' resp. $S\frac{d_1}{d}, P\frac{a_2}{a}, P\frac{a_1}{a}, Q\frac{b_2}{b}$, und statt der dortigen Winkel p, p′, q, q′ resp. S, P, P, Q gesetzt werden:

$$S\frac{d_1}{d}\frac{\sin(S-d)}{\sin(a-d)}+P\left(\frac{a_2}{a}\frac{\sin(P-d)}{\sin(a-d)}+\frac{a_1}{a}\frac{\sin(P-b)}{\sin(a-b)}\right)$$
$$+Q\frac{b_2}{b}\frac{\sin(Q-b)}{\sin(a-b)}=0,$$

und eben so noch drei andere Gleichungen, welche auch schon aus dieser durch gehörige Verwandlung der Buchstaben in die nächstfolgenden hervorgehen und mit ihr die Bedingungen des Gleichgewichts ausmachen.

Da in diesen vier Gleichungen nicht die Seiten des

ersten durch Gerade von unveränderlicher Länge verbindet, die Winkel dieses Vierecks aber veränderlich seyn lässt.

Auf solche Weise sind die Kräfte p, q, r, s am Vierecke $ABCD$ sowohl, als am Vierecke $PQRS$, die Kräfte p, q, s, r an jedem der beiden Vierecke $ABSR$ und $PQDC$, und die Kräfte p, r, q, s an den Vierecken $ARQD$ und $PCBS$ im Gleichgewichte.

§. 220.

Eine nähere Betrachtung wollen wir noch dem speciellen Falle widmen, wenn das Viereck $ABCD$ ein ebenes ist. Da alsdann die Ebenen DAB, ABC, etc., in welchen die Richtungen der Kräfte enthalten seyn müssen, mit der Ebene des Vierecks zusammenfallen, so müssen auch die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieser Ebene liegen. Die Gleichungen I. oder I*. für die Richtungen und die Verhältnisse II. oder II*. zwischen den Intensitäten der Kräfte bleiben ungeändert. Indessen wird es, späterer Untersuchungen willen, nicht überflüssig seyn, von diesen Formeln für den Fall, wenn das Viereck ein ebenes ist, nachstehende Entwickelung noch beizufügen.

Bezeichnen p, q, r, s die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $p, \ldots s$ mit einer in der Ebene beliebig gezogenen Linie oder Axe machen. Gleicher Weise seyen a, b, c, d die Winkel der Linien AB, BC, CD, DA mit jener Axe und a, b, c, d die Pressungen, welche dieselben Linien $AB, \ldots$ resp. in den Enden A, B, C, D nach den Richtungen AB, $BC, \ldots$ erleiden, also $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ die Pressungen auf die andern Enden B, C, D, A der Linien $AB, \ldots$ nach denselben Richtungen $AB, \ldots$. Auf den Punkt A wir-

als von den zuletzt entwickelten Formeln Gebrauch zu machen.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen zwei Kräften P und R zu finden, welche in F und H (Fig. 57.) an zwei gegenüberliegenden Seiten AB und CD eines Vierecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln angebracht sind.

Auflösung. Weil an der Seite DA keine Kraft angebracht ist, so müssen sich die auf DA in D und A wirkenden Pressungen allein das Gleichgewicht halten, und ihre Richtungen müssen daher in DA fallen. Die Pressung, welche AB in A erleidet, fällt daher ebenfalls in DA, und aus ähnlichem Grunde die Pressung auf AB im Punkte B in BC. Da nun an AB die in F angebrachte Kraft P mit den Pressungen in A und B im Gleichgewichte seyn muss, so müssen sich DA, BC und die Richtung von P in einem Punkte X schneiden, woraus zugleich folgt, dass 1) das Viereck ein ebenes seyn muss. Da ferner das Gleichgewicht nicht aufhören darf, wenn die Seiten des Vierecks unbeweglich gegen einander angenommen werden, so müssen 2) die Kräfte P und R einander gleich und direct entgegengesetzt seyn, also in die Gerade FH fallen, und diese Gerade muss 3) den Durchschnitt X von DA mit BC treffen, weil FX die Richtung von P war. — Dass diese drei nothwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, erhellet ohne weitere Erörterung.

§. 228.

Zusätze. *a.* Wird die Seite CD unbeweglich angenommen, und wirkt nur auf AB in F eine Kraft P, so zeigt sich auf gleiche Weise, dass nur dann,

Es verhält sich aber, wenn man diese in MB fallenden, durch die Zerlegung von P und Q sich ergebenden, Kräfte Z und $-Z$ nennt:

$$P : Z = \sin AMB : \sin AMF = \frac{AB}{MB} : \frac{AF}{MF},$$

$$Q : -Z = \sin BNC : \sin GNC = \frac{BC}{NB} : \frac{GC}{NG};$$

olglich $P : Q = -\frac{AB}{MB} \cdot \frac{MF}{AF} : \frac{BC}{NB} \cdot \frac{NG}{GC}$.

Die Erfüllung dieser Proportion ist daher die vierte nd letzte Bedingung des Gleichgewichts.

§. 230.

Zusätze. *a.* Heissen U, V die Durchschnitte von BC mit MA, MF, und W, X die Durchschnitte von AB mit NG und NC, so findet sich eben so, wie orhin:

$$P : Z = \frac{UB}{MB} : \frac{UV}{MV}, \quad Q : -Z = \frac{BX}{NB} : \frac{WX}{NW},$$

olglich $P : Q = -\frac{UB}{MB} \cdot \frac{MV}{UV} : \frac{BX}{NB} \cdot \frac{NW}{WX}$.

b. Ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, so ind U und X unendlich entfernte Punkte, folglich $UB : UV = 1$, $BX : WX = 1$, und man hat daher in iesem Falle:

$$P : Q = -\frac{MV}{MB} : \frac{NW}{NB}.$$

c. Wenn der Punkt M, in welchem die Richtung on P die Seite DA trifft, in D fällt, so fällt damit uch N zusammen, und es wird, wenn zugleich das Viereck ein Parallelogramm ist (Fig. 61.)

Pressungen, also auch die Pressung auf A, als den einen Endpunkt von AB, fallen daher in DA.

An der Seite AB sind die Pressungen auf die Endpunkte A und B derselben mit der Kraft P im Gleichgewichte. Da nun die Pressung auf A in DA fällt, so muss P mit DA in einer Ebene liegen, und wenn demnach P die DA in M schneidet, so fällt die Pressung auf B in BM.

Die Pressung auf B, als den einen Endpunkt von BC fällt daher gleichfalls in BM; die Pressung auf der Seite BC anderes Ende C fällt in CD wegen des unbeweglichen Punktes, an welchem CD mit dem Ende D befestigt ist. Mit beiden Pressungen zusammen ist aber die Kraft Q im Gleichgewichte. Mithin müssen BM und CD in einer Ebene liegen, und die Richtung von Q muss den Durchschnitt N dieser Geraden treffen.

Hieraus fliessen nun zunächst folgende Bedingungen des Gleichgewichts: 1) das Viereck $ABCD$ muss ein ebenes seyn; 2) die Richtungen der Kräfte P und Q müssen in dieser Ebene begriffen seyn; 3) die Punkte M und N, in denen diese Richtungen resp. die Seiten DA und CD treffen, müssen mit der Ecke B in einer Geraden liegen.

Sind daher das ebene Viereck $ABCD$, die beiden Angriffspunkte F, G und die Richtung MF der einen Kraft P gegeben, so findet man damit auch die Richtung GN der andern Q. Kennt man ferner die Intensität der einen Kraft P, so ergiebt sich die Intensität der andern Q dadurch, dass, wenn man P nach MA und MB und Q nach BN und CN zerlegt, die zwei in MB fallenden Kräfte sich aufheben müssen.

sich die zwei Pressungen auf die Enden der Seite das Gleichgewicht halten. Hieraus fliessen aber die Bedingungen: dass 1) jede Kraft mit den zwei anliegenden Seiten in einer Ebene enthalten seyn muss, und dass 2), wenn jede Kraft nach den zwei anliegenden Seiten in zwei zerlegt wird, je zwei der somit entstehenden Kräfte, welche auf die beiden Enden einer Seite wirken, einander gleich und entgegengesetzt seyn müssen.

Sind daher das Vieleck und die Richtungen der Kräfte, bis auf eine, gegeben, so kann man eben so, wie in §. 219. *a.*, die noch übrige Richtung und die Verhältnisse sämmtlicher Kräfte zu einander bestimmen.

Wird bloss die noch fehlende Richtung verlangt, und ist das Vieleck in einer Ebene enthalten, so kann man ähnlicher Weise, wie in §. 221., die Richtung auch durch blosses Ziehen gerader Linien finden, woraus, da dieses immer auf mehrfache Art sich bewerkstelligen lässt, neue geometrische Sätze, das Liegen von Punkten in Geraden betreffend, hervorgehen.

Seyen z. B. das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 54.) und die Richtungen der auf A, B, C, D wirkenden Kräfte p, q, r, s gegeben, und werde die Richtung der an E anzubringenden Kraft t gesucht. Bezeichnet man der Kürze willen die Resultante von p und q mit (pq), die Resultante von p, q, r mit (pqr), u. s. w., so geht aus ähnlichem Grunde, wie beim Vierecke in §. 221.,

(pq) durch die Punkte $p \cdot q$ und $EA \cdot BC$,
(pqr) — — — $(pq) \cdot r$ und $EA \cdot CD$,
$(pqrs)$, also auch t, — — — $(pqr) \cdot s$ und E.

Hiermit kann man also nach und nach die Richtungen von (pq), (pqr) und t durch Ziehen von Ge-

Linien a, b, c über. — Die Linie a, welche nur der Bedingung unterworfen ist, dass sie durch die zwei Punkte B und C geht, erleidet von diesen Punkten die normalen Pressungen $-a_2$ und $-a_3$, und diese müssen mit der an der Linie angebrachten Kraft P im Gleichgewichte seyn. Die Richtung dieser Kraft muss daher gleichfalls die Linie rechtwinklig schneiden, und wenn F der Angriffspunkt von P ist, so muss sich verhalten:

$$P : a_2 : a_3 = BC : FC : BF.$$

Aus gleichen Gründen sind auch Q und R auf b und c normal, und man hat, wenn G und H die Angriffspunkte dieser Kräfte bezeichnen:

$$Q : b_3 : b_1 = CA : GA : CG,$$
$$R : c_1 : c_2 = AB : HB : AH.$$

Eliminirt man aus diesen 3 einfachen und 3 Doppel-Proportionen die 6 Pressungen, so erhält man zuerst die Verhältnisse zwischen den 3 Kräften:

$$\text{I.} \begin{cases} Q : R = CA \cdot HB \sin BAN : AB \cdot CG \sin MAC, \\ R : P = AB \cdot FC \sin CBL : BC \cdot AH \sin NBA, \\ P : Q = BC \cdot GA \sin ACM : CA \cdot BF \sin LCB; \end{cases}$$

und wenn man diese Verhältnisse zusammensetzt:

$$\text{II.} \quad \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} \cdot \frac{AH}{HB} = \frac{MA}{AN} \cdot \frac{NB}{BL} \cdot \frac{LC}{CM},$$

weil $\sin BAN : \sin NBA = BN : AN$, etc.

Sind daher das Dreieck LMN der drei unbeweglichen Geraden, das eingeschriebene Dreieck ABC der drei beweglichen Geraden und zwei von den drei Angriffspunkten F, G, H gegeben, so finden sich mittelst der Gleichung II. der dritte, und mittelst der Proportionen I. die Verhältnisse zwischen den Kräften

selbst; die Richtungen derselben aber müssen auf den Seiten des Dreiecks ABC normal seyn.

§. 232.

Zusätze. *a.* Das Gleichgewicht des Systems dauert noch fort, wenn zwei der drei Kräfte, etwa Q und R, entfernt und statt derselben zwei unbewegliche Curven β und γ in der Ebene angebracht werden, welche die Geraden b und c zu berühren genöthigt sind und gegenwärtig in G und H berühren.

Ist demnach die Beweglichkeit dreier Geraden a, b, c in einer Ebene dergestalt beschränkt, dass ihre gegenseitigen Durchschnitte A, B, C in drei unbeweglichen Geraden MN, NL, LM der Ebene liegen müssen, und dass zwei derselben, b und c, zwei unbewegliche Curven β und γ der Ebene zu berühren genöthigt sind, so wird eine auf die dritte Gerade a in der Ebene wirkende Kraft nur dann keine Bewegung hervorbringen, wenn ihre Richtung auf a normal ist, und ihr Angriffspunkt F in a und die zwei Berührungspunkte G und H in b und c so liegen, dass der Gleichung II. Genüge geschieht.

b. Werden die Geraden b und c, die Curven β und γ berührend, bewegt, während ihr Durchschnitt A in MN fortgeht, so bewegt sich die durch die Schneidepunkte C und B der Tangenten b und c mit LM und NL gelegte Gerade a als Tangente einer dritten Curve α. Die Beweglichkeit von a wird aber offenbar nicht gemindert, wenn wir diese dritte Curve wirklich hinzufügen und annehmen, dass a sie zu berühren gezwungen ist; und eben so wenig wird die Beweglichkeit von a vermehrt, wenn wir hierauf a ausser Verbindung mit b und c bringen. Es muss da-

her auch jetzt noch bei einer normal auf a in F wirkenden Kraft Ruhe herrschen. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn F der Berührungspunkt von a mit α ist. Wir schliessen hieraus mit Rücksicht auf die Gleichung II.:

A. Bewegen sich drei Punkte A, B, C willkührlich in den Seiten eines unbeweglichen Dreiecks LMN, so ist immer das Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die Seiten des Dreiecks von den Punkten getheilt werden, gleich dem Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die Seiten des von den Punkten gebildeten Dreiecks ABC in den Berührungspunkten F, G, H mit den drei Curven getheilt werden, welche diese Seiten bei der gedachten Bewegung als Tangenten erzeugen.

c. Treffen l, m, n, also auch L, M, N, in einem Punkte zusammen, sind also A, B, C in drei Geraden beweglich, welche sich in einem Punkte schneiden, so wird jedes der drei Verhältnisse $MA : AN$, $NB : BL$, $LC : CM = -1$, also auch zufolge II.:

$$(BF : FC)\ (CG : GA)\ (AH : HB) = -1.$$

F, G, H liegen dann folglich in einer Geraden *), und man hat den Satz:

Bewegen sich drei Punkte A, B, C auf beliebige Weise in drei Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, so liegen in jedem Augenblicke die drei Punkte F, G, H, in denen die drei Geraden BC, CA, AB die von ihnen als Tangenten erzeugten Curven berühren, in einer Geraden.

d. Der Satz A. kann noch allgemeiner gefasst wer-

*) Vergl. des Verf. Baryc. Calcul §. 198. 2).

den, wenn man die Punkte A, B, C sich in beliebigen unbeweglichen Curven λ, μ, ν bewegen lässt, von denen MN, NL, LM die Tangenten in A, B, C, ... sind; er lautet dann also:

B. Hat man ein in einer Ebene sich stetig veränderndes Dreieck ABC, so ist in jedem Augenblicke das Product aus den Verhältnissen, nach denen die Seiten des Dreiecks in den Berührungspunkten F, G, H mit den Curven α, β, γ getheilt werden, welche die Seiten als Tangenten erzeugen, gleich dem Product aus den Verhältnissen, nach denen bei einem zweiten Dreiecke LMN, dessen Seiten die Tangenten der von den Ecken A, B, C, des erstern Dreiecks beschriebenen Curven λ, μ, ν sind, diese Seiten von den Ecken A, B, C, als den Berührungspunkten, getheilt werden.

Dieser allgemeinere Satz lässt sich wiederum specialisiren, indem man an die Stelle der Curven α, β, γ, an denen sich BC, CA, AB als Tangenten fortbewegen, blosse Punkte setzt, und er lautet dann folgendermassen:

C. Wenn sich in einer Ebene die Seiten eines darin enthaltenen Dreiecks ABC um unbewegliche Punkte F, G, H drehen, so ist stets das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten von diesen Punkten getheilt werden, gleich dem Producte aus den Verhältnissen, nach welchen von den Ecken desselben Dreiecks ABC die Seiten eines zweiten Dreiecks LMN getheilt werden, dessen Seiten die von den Ecken des erstern beschriebenen Curven λ, μ, ν berühren.

Wie man sogleich sieht, entspricht dieser Satz dem obigen A. nach dem bekannten Gesetze der Dualität.

her auch jetzt noch bei einer normal auf a in F wirkenden Kraft Ruhe herrschen. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn F der Berührungspunkt von a mit α ist. Wir schliessen hieraus mit Rücksicht auf die Gleichung II.:

A. Bewegen sich drei Punkte A, B, C willkührlich in den Seiten eines unbeweglichen Dreiecks LMN, so ist immer das Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die Seiten des Dreiecks von den Punkten getheilt werden, gleich dem Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die Seiten des von den Punkten gebildeten Dreiecks ABC in den Berührungspunkten F, G, H mit den drei Curven getheilt werden, welche diese Seiten bei der gedachten Bewegung als Tangenten erzeugen.

c. Treffen l, m, n, also auch L, M, N, in einem Punkte zusammen, sind also A, B, C in drei Geraden beweglich, welche sich in einem Punkte schneiden, so wird jedes der drei Verhältnisse $MA:AN$, $NB:BL$, $LC:CM=-1$, also auch zufolge II.:

$$(BF:FC)\ (CG:GA)\ (AH:HB)=-1.$$

F, G, H liegen dann folglich in einer Geraden *), und man hat den Satz:

Bewegen sich drei Punkte A, B, C auf beliebige Weise in drei Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, so liegen in jedem Augenblicke die drei Punkte F, G, H, in denen die drei Geraden BC, CA, AB die von ihnen als Tangenten erzeugten Curven berühren, in einer Geraden.

d. Der Satz A. kann noch allgemeiner gefasst wer-

*) Vergl. des Verf. Baryc. Calcul §. 198. 2).

Satz A., auch unmittelbar aus statischen Betrachtungen herleiten. Zu dem Ende hat man nur in §. 231. die auf die Geraden a, b, c in F, G, H wirkenden Kräfte als Pressungen auf diese Geraden von unbeweglichen Punkten F, G, H, durch welche sie gehen müssen, und die Pressungen auf die Punkte A, B, C von den unbeweglichen Geraden l, m, n, in denen sie beweglich gesetzt wurden, als an diesen Punkten angebrachte Kräfte zu betrachten; diess führt zu folgender

Aufgabe. Um drei unbewegliche Punkte F, G, H und in der Ebene derselben sind drei gerade Linien a, b, c beweglich. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drei Kräften p, q, r zu finden, welche in der Ebene auf die gegenseitigen Durchschnitte A, B, C der drei Geraden, d. i. auf Punkte wirken, welche in b und c, c und a, a und b zugleich beweglich sind.

Die Lösung dieser Aufgabe geht ohne Weiteres aus den Formeln in §. 231. hervor. Sind nämlich AS, BT, CU die noch unbekannte Richtung von p, q, r, und sind l, m, n auf dieselben winkelrecht gezogene Gerade, so hat man, wie dort:

$$p : b_1 : c_1 = \sin bc : \sin cl : \sin lb$$
$$= \sin CAB : \cos BAS : \cos SAC,$$

u. eben so: $q : c_2 : a_2 = \sin ABC : \cos CBT : \cos TBA,$

$$r : a_3 : b_3 = \sin BCA : \cos ACU : \cos UCB.$$

Eliminirt man hieraus die Pressungen mittelst der schon oben erhaltenen Proportionen:

$$a_2 : a_3 = FC : BF,\ b_3 : b_1 = GA : CG,$$
$$c_1 : c_2 = HB : AH,$$

so kommt:

$$\text{I}^{a}.\quad \begin{cases} q : r = CA.FC.\cos ACU : AB.BF.\cos TBA, \\ r : p = AB.GA.\cos BAS : BC.CG.\cos UCB, \\ p : q = BC.HB.\cos CBT : CA.AH.\cos SAC, \end{cases}$$

und hieraus die Gleichung:

$$\text{II}^{a}.\quad \frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AH}{HB} = \frac{\cos CBT}{\cos UCB}\cdot\frac{\cos ACU}{\cos SAC}\cdot\frac{\cos BAS}{\cos TBA},$$

in welcher nur noch die Richtungen der Kräfte vorkommen, und wonach, wenn die Richtungen zweier Kräfte gegeben sind, die Richtung der dritten gefunden werden kann. Die Verhältnisse zwischen den Kräften selbst ergeben sich alsdann aus den Proportionen I^{a}.

Werden nun diese Bedingungen erfüllt, und ist daher das System im Gleichgewichte, so kann man auch die Punkte A und B, statt auf sie die Kräfte p und q wirken zu lassen, in unbeweglichen Curven, welche auf den Richtungen von p und q normal sind und daher l und m zu Tangenten haben, beweglich annehmen. Hiermit wird der dritte Punkt C in einer dritten Curve beweglich, welche auf der Richtung von r normal seyn und folglich n zur Tangente haben muss, indem sonst der Punkt C nicht in Ruhe bleiben könnte. Die hierbei allein noch zu berücksichtigende Gleichung II^{a} ist aber, wie man sich leicht überzeugt, mit der obigen Gleichung II. identisch, und giebt damit für den obigen Satz C. den Beweis ab.

Bedingungen des Gleichgewichts bei sich ähnlich bleibenden Figuren.

§. 234.

Aufgabe. Zwei Gerade a und c (Fig. 63.) sind in B unter einem Winkel von unveränderlicher Grösse

fest mit einander verbunden; desgleichen zwei andere Gerade a' und b unter einem unveränderlichen Winkel in C. Die Schenkel a und a' sollen zusammen fallen und an einander verschiebbar seyn, und die Winkel selbst sollen in einer und derselben Ebene liegen. In dieser Ebene wirken auf die Spitzen der Winkel B und C und auf den gegenseitigen Durchschnitt ihrer Schenkel b und c, oder vielmehr auf einen in b und c zugleich beweglichen Punkt A, resp. die Kräfte q, r, p. Welches sind die Bedingungen des Gleichgewichts?

Auflösung. Das gegebene System besteht aus drei beweglichen Stücken: aus dem Winkel ac, dem Winkel $a'b$ und dem Punkte A, und wir haben nun das Gleichgewicht jedes dieser drei Stücke besonders zu untersuchen.

1) Die auf die Spitze B des Winkels ac wirkende Kraft muss mit der Pressung c_1, welche sein Schenkel c rechtwinklig von dem in ihm beweglichen Punkte A erleidet, und mit der Pressung auf seinen andern Schenkel a von dem an a verschiebbaren a' im Gleichgewichte seyn. Da diese Verschiebbarkeit sich dadurch bewerkstelligen lässt, dass man in a' zwei beliebig bestimmte Punkte D und E annimmt, welchen a zu begegnen genöthigt ist, so ist die Pressung von a' auf a zwei auf a in D und E rechtwinkligen Pressungen gleich zu achten, die sich aber, als zwei parallele Kräfte, zu einer einzigen f zusammensetzen lassen, welche den Schenkel a gleichfalls rechtwinklig, etwa in F, trifft. Die Richtung von q und die auf c in A und auf a in F errichteten Normalen müssen sich daher in einem Punkte G schneiden. Nimmt man folglich die Richtung BG von q als willkührlich gegeben an und errichtet in A auf BA eine Normale AG,

welche BG in G schneide, so wird der Fusspunkt einer von G auf BC gefällten Normale der gedachte Punkt F seyn. Auch kann man damit, wenn noch die Intensität von q gegeben ist, die Intensitäten von c_1 und f finden.

2) Beim Winkel $a'b$ ist die Kraft r an der Spitze C desselben im Gleichgewichte mit der normalen Pressung b_1 des Punktes A auf seinen Schenkel b und den von a herrührenden normalen Pressungen auf die Punkte D und E seines Schenkels a', oder der damit gleichwirkenden einzigen Pressung $-f$ auf a' im Punkte F. Die Richtungen von r, b_1 und $-f$ müssen sich daher in einem Punkte begegnen. Trifft demnach eine auf AC in A errichtete Normale die bereits gezogene FG in H, so ist CH die Richtung von r, und es lassen sich mittelst der schon bekannten Intensität von $-f$ die Intensitäten von r und b_1 bestimmen.

3) Am Punkte A muss die auf ihn unmittelbar wirkende Kraft p den Pressungen $-b_1$ und $-c_1$, welche er von den Linien b und c erleidet, das Gleichgewicht halten und kann somit ohne Weiteres gefunden werden, noch leichter aber dadurch, dass p auch im Gleichgewichte mit q und r ist, und dass folglich die Richtung von p, nächst A, noch den Schneidepunkt I der Richtungen BG und CH von q und r treffen muss. Die Intensität von p ergiebt sich alsdann aus denen von q und r.

Nach diesem Allen sind die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts folgende: 1) Die auf A, B, C wirkenden Kräfte müssen eben so, als wären diese Punkte fest mit einander verbunden, im Gleichgewichte seyn, und sich daher in einem Punkte I schneiden. 2) Die resp. Durchschnitte G und H der auf AB

und AC in A errichteten Perpendikel mit den Richtungen BI und CI müssen in einer auf BC normalen Geraden liegen.

§. 235.

Das von den zwei Winkeln ac und $a'b$ gebildete Dreieck ABC ist dergestalt beweglich, dass es erstens, ohne seine Seitenlängen zu verändern, jede beliebige Lage in der Ebene einnehmen kann. Zweitens kann eine Seite desselben, welche man will, durch Verschiebung der Schenkel a und a' an einander jede beliebige Länge erhalten; allein das Dreieck bleibt sich dabei immer ähnlich, weil die zwei unveränderlichen Winkel ac und $a'b$ zugleich Winkel desselben sind. Diesem gemäss lässt sich die vorige Aufgabe auch folgendermassen abfassen:

Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drei in einer Ebene auf drei Punkte wirkenden Kräften zu finden, wenn die Punkte in der Ebene dergestalt beweglich sind, dass das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt.

Man kann hiernach erwarten, dass der Ort des Punktes I, in welchem sich die auf A, B, C wirkenden Kräfte schneiden, von der gegenseitigen Lage der A, B, C auf symmetrische Weise abhängen werde; und dies bestätigt sich auch, wenn man die Curve untersucht, in welcher alle nach der im vor. §. erhaltenen Bedingung zu construirenden Oerter von I begriffen sind. Diese Bedingung besteht darin, dass GH, HA, AG resp. auf BC, CA, AB normal sind; es sind folglich die Dreiecke ABC und AGH einander ähnlich, und es verhält sich $AB : AG = AC : AH$. Mithin sind auch die rechtwinkligen Dreiecke BAG und CAH

einander ähnlich, folglich die Winkel ABI und ACI einander gleich, folglich liegen die drei Angriffspunkte A, B, C der Kräfte und der gegenseitige Durchschnitt I ihrer Richtungen in einem Kreise.

Man wird sich hierbei der Untersuchungen erinnern, welche im 7. Kapitel des ersten Theiles über den Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte in einer Ebene angestellt worden sind. Von den zwei Kräften p und q, welche auf die Punkte A und B wirken und sich in I schneiden, ist hiernach der Mittelpunkt derjenige Punkt C in der Richtung CI ihrer Resultante $-r$, in welchem dieselbe von dem durch A, B, I zu ziehenden Kreise getroffen wird (§. 115.), und dieser Punkt C besitzt die Eigenschaft, dass, wenn das Dreieck ABC ohne Aenderung seiner Grösse und Gestalt beliebig in seiner Ebene verschoben wird, und die Kräfte p, q auf A, B nach Richtungen, die mit ihren anfänglichen parallel sind, zu wirken fortfahren, auch ihre Resultante, der Grösse und Richtung nach sich nicht ändernd, stets durch C geht (§. 114.). Wird folglich an C eine dieser Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft r angebracht, so werden die Kräfte p, q, r, (deren Intensitäten sich nach §. 120. wie die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks verhalten müssen,) bei jeder Verrückung des Dreiecks in seiner Ebene im Gleichgewichte verharren. Hieraus ergeben sich aber in Verbindung mit dem Vorigen die merkwürdigen Resultate:

Sind drei Punkte in einer Ebene dergestalt beweglich, dass das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt, und halten sich drei auf sie wirkende Kräfte das Gleichgewicht, so herrscht auch noch Gleichgewicht bei jeder andern Lage, welche

man den Punkten zufolge ihrer Beweglichkeit geben kann, wenn nur die Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben; und umgekehrt:

Sind drei Kräfte, welche auf drei fest mit einander verbundene Punkte in einer Ebene wirken, im Gleichgewichte, und dauert dasselbe noch fort, wenn das System der drei Punkte in seiner Ebene beliebig verschoben wird, die Kräfte aber parallel mit ihren anfänglichen Richtungen fortwirken, so wird das Gleichgewicht auch nicht unterbrochen, wenn man den Punkten eine solche gegenseitige Beweglichkeit noch beilegt, bei welcher das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt.

§. 236.

Keine Schwierigkeit hat es, auch an vier, fünf, oder mehrern Punkten, die in einer Ebene liegen und darin dergestalt beweglich sind, dass die durch sie bestimmte Figur sich immer ähnlich bleibt, sich das Gleichgewicht haltende Kräfte anzubringen. Denn seyen A, B, C, D vier solche Punkte, an denen sich die Kräfte p, q, r, s das Gleichgewicht halten sollen; zwei derselben, etwa p und q, seyen gegeben. Durch A, B und den Durchschnitt N von p mit q beschreibe man einen Kreis, welcher die Resultante x von p und q ausser in N noch im Punkte X schneide. Denkt man sich nun X als neuen Punkt des Systems, also mit $A,..D$ in solcher Verbindung, dass er gegen sie immer in ähnlicher Lage bleibt, und bringt man an X die sich aufhebenden Kräfte x und $-x$ an, so sind p, q, $-x$ an A, B, X im Gleichgewichte; mithin müssen es auch x, r, s an X, C, D seyn, und man kann mittelst der bekannten Kraft x und eines durch X,

C, D zu beschreibenden Kreises die Intensitäten und Richtungen von r, s finden.

Sind ferner A, B, C, D, E fünf Punkte in einer Ebene, die in ähnlicher Lage gegen einander verharren sollen; p, q, r, s, t die auf sie wirkenden Kräfte, und von ihnen p, q, r gegeben, so suche man wie vorhin den Mittelpunkt X der Kräfte p, q in ihrer Resultante x und denke sich diesen mit den Kräften x und $-x$ als einen zum Systeme gleichfalls gehörigen Punkt. Da nun p, q, $-x$ an A, B, X im Gleichgewichte sind, so müssen es auch x, r, s, t an X, C, D, E seyn, wenn Gleichgewicht zwischen p, q, r, s, t herrschen soll; und die Aufgabe ist somit auf die vorige, welche ein System von vier Punkten betraf, zurückgeführt.

Ueberhaupt also, — denn auf analoge Weise kann man von 5 Punkten auf 6, u. s. w. schliessen —: Wenn n Punkte in einer Ebene so beweglich sind, dass sie stets in ähnlicher Lage gegen einander bleiben, und wenn auf $n-2$ derselben beliebig gegebene Kräfte in der Ebene wirken, so kann man immer an den zwei übrigen Punkten zwei Kräfte hinzufügen, welche mit erstern Gleichgewicht hervorbringen.

Zugleich aber erhellet, dass dieselbe Construction, womit sich diese zwei Kräfte finden lassen, auch dann anzuwenden ist und die nämlichen zwei Kräfte giebt, die, wenn die n Punkte in unveränderlicher Lage gegen einander genommen werden, am $(n-1)$sten und $n$ten Punkte angebracht werden müssen, damit Gleichgewicht entstehe und bei beliebiger Verrückung des Systems in der Ebene auch fortdaure, sobald nur sämmtliche n Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben. Die Bedingungen zwischen den n Kräften sind

also in dem einen Falle dieselben, wie in dem andern, und wir ziehen hieraus die Folgerung, *dass die zwei Sätze zu Ende des vor. §. nicht bloss für drei, sondern für jede beliebige Anzahl von Punkten in einer Ebene Gültigkeit haben.*

Ich bemerke nur noch, dass eben so, wie in der Aufgabe des §. 234. ein sich ähnlich bleibendes Dreieck gebildet wurde, auch ein System von jeder grössern Anzahl in ähnlicher Lage bleibender Punkte leicht construirt werden kann. Denn man hat nur in einer Ebene ein System von Geraden, welche sich unter unveränderlichen Winkeln in einem Punkte treffen, mit einem andern Systeme von derselben Beschaffenheit dergestalt zu verbinden, dass eine Gerade des einen Systems mit einer Geraden des andern zusammenfällt und längs derselben verschiebbar ist. Alle Durchschnittspunkte zweier Geraden des einen und andern Systems, so wie jeder der zwei Punkte selbst, in welchem alle Geraden eines und desselben Systems zusammenlaufen, werden dann stets in ähnlicher Lage gegen einander verharren.

Viertes Kapitel.

Von den Bedingungen der Unbeweglichkeit.

§. 237.

Unter den Gleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften ausdrücken, die auf ein System mit einander verbundener, an sich frei be-

weglicher Körper wirken, kommen zu Folge des Grundsatzes I. in §. 190. immer auch diejenigen Gleichungen mit vor, welche erfüllt seyn müssen, sobald die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich angenommen wird, und somit sämmtliche Körper einen einzigen frei beweglichen ausmachen. Dieser letztern Gleichungen giebt es im allgemeinsten Falle sechs. Weiss man folglich irgendwoher, dass das Gleichgewicht eines Systems mit einander verbundener, an sich frei beweglicher Körper, auf welche beliebige Kräfte wirken, immer schon durch sechs Gleichungen bedingt ist, so können diese keine andern, als die sechs zum Gleichgewichte eines einzigen Körpers erforderlichen Gleichungen seyn. Aber nicht allein dieses, sondern es kann auch keine gegenseitige Beweglichkeit zwischen den Körpern statt finden.

Um sich von der Richtigkeit des letztern Schlusses vollkommen zu überzeugen, bringe man an den mit einander verbundenen Körpern beliebige Kräfte an. Alsdann ist es immer möglich, an einem der Körper, er heisse a, oder an Punkten, die mit ihm fest verbunden sind, zwei solche Kräfte hinzuzufügen, welche in Vereinigung mit den erstern Kräften den 6 Gleichungen Genüge leisten. Sind nun die 6 Gleichungen die einzigen zum Gleichgewichte erforderlichen Bedingungen, und ist folglich durch Hinzufügung der zwei Kräfte Gleichgewicht zu Wege gebracht worden, so muss dieses auch noch bestehen, wenn man a unbeweglich setzt. Wenn aber, sobald einer der Körper unbeweglich angenommen wird, keine auf die übrigen Körper wirkenden Kräfte Bewegung zu erzeugen vermögen, so findet keine gegenseitige Beweglichkeit statt.

§. 238.

Ob Körper, die auf gegebene Weise mit einander verbunden sind, ihre Lage gegen einander noch ändern können oder nicht, die Beantwortung dieser Frage kann nicht allein in der Mechanik, sondern auch bei rein geometrischen Untersuchungen oft von Interesse seyn. Die Statik bietet uns hierzu ein sehr einfaches Mittel in dem Satze des vor. §. dar, dass es bei gegenseitiger Unbeweglichkeit nicht mehr als 6 Gleichungen des Gleichgewichts giebt. Ich glaube daher, indem ich dieses Princip etwas weiter zu entwickeln suche, nichts Ueberflüssiges zu thun, um so weniger, als der Geometrie wohl nicht immer gleich einfache Mittel zur Aburtheilung über die Beweglichkeit zu Gebote stehen dürften.

Um bei einem Systeme von n mit einander verbundenen Körpern die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, hat man nach §. 215 für jeden einzelnen Körper des Systems die Gleichungen des Gleichgewichts, im Allgemeinen sechs, zwischen den unmittelbar auf ihn wirkenden Kräften und den Pressungen, denen er ausgesetzt ist, zu entwickeln und aus diesen $6n$ Gleichungen die Intensitäten der Pressungen, so wie auch ihre Richtungen, wenn diese unbekannt sind, zu eliminiren. Die somit hervorgehenden Gleichungen, $6n-p$ zum wenigsten, wenn p die Zahl der von den Pressungen herrührenden unbekannten Grössen ist, sind die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts. Man setze daher die Zahl dieser Bedingungsgleichungen $= 6n-p+q$, wo q eine positive ganze Zahl oder auch null ist.

Ist nun jeder Körper des Systems an sich frei beweglich, so giebt es nicht weniger als 6 Bedingungsgleichungen, und wenn es ihrer nur 6 sind, also wenn

$6n - p + q = 6$, d. i. $6(n-1) + q = p$ ist, so können nach vor. §. die Körper ihre Lage gegen einander nicht ändern. Ist dagegen $6(n-1) + q > p$, so herrscht in dem Systeme gegenseitige Beweglichkeit.

Hieraus schliessen wir endlich, dass, wenn $p < 6(n-1)$, stets gegenseitige Beweglichkeit statt findet, und dass, wenn gegenseitige Unbeweglichkeit eintreten soll, $p =$ oder $> 6(n-1)$ seyn muss, dass aber diese Bedingung, wenn auch stets nothwendig, doch nicht immer hinreichend für die Unbeweglichkeit ist.

§. 239.

Berühren sich je zwei Körper des Systems mit ihren Flächen, oder berührt eine Kante oder Ecke eines Körpers die Fläche eines andern, oder kreuzen sich die Kanten zweier Körper unter einem beliebigen endlichen Winkel, so ist die Richtung der daselbst statt findenden Pressungen schon im Voraus bekannt, und p ist der Anzahl der Pressungen selbst, d. i. der Begegnungspunkte, gleich. Begegnen sich daher n Körper auf die eine oder die andere der eben gedachten Arten in weniger als $6(n-1)$ Punkten, so kann immer die gegenseitige Lage derselben verändert werden, ohne dass eine der Begegnungen wegfällt. Nicht mehr ist aber diess jederzeit möglich, wenn sie sich in $6(n-1)$ oder noch mehrern Punkten treffen.

So haben wir bereits oben (§. 193.) bemerkt, dass zwei Körper, die sich in 5 oder weniger Punkten berühren, immer an einander verschoben werden können, im Allgemeinen aber nicht mehr bei 6 oder mehrern Berührungen. Auf gleiche Art findet Verschiebbarkeit im Allgemeinen nicht mehr statt, wenn 6 Ecken des einen Körpers die Fläche des andern treffen, oder wenn

eine Curve in 6 Punkten eine Fläche berührt, oder wenn zwei Curven (von doppelter Krümmung) in 6 Punkten über einander weggehen. — Letztere 6 Punkte können auch paarweise zusammenfallen, so dass die beiden Curven in drei Punkten einander einfach berühren. Auch kann man die 6 Punkte zu dreien zusammenfallen lassen, so dass sich die Curven in zwei Punkten berühren und in jedem derselben eine gemeinschaftliche Krümmungsebene haben, u. s. w. In keinem dieser Fälle lassen sich die Curven an einander verschieben, ohne dass die Arten der Berührung aufgehoben würden.

Sind 6 Punkte des einen Körpers mit 6 Punkten des andern nicht unmittelbar, sondern durch 6 Gerade von unveränderlicher Länge verbunden, so kann gleichfalls die gegenseitige Lage der beiden Körper im Allgemeinen nicht mehr geändert werden. Denn da beim Gleichgewichte des Ganzen jede der 6 Geraden an ihren zwei Endpunkten zwei einander entgegengesetzte aber gleiche Pressungen ausübt, so sind hier nur die Intensitäten der 6 Pressungen unbekannt, und, diese aus den zweimal 6 Gleichungen für das Gleichgewicht der beiden Körper eliminirt, bleiben 6 Bedingungsgleichungen zurück.

§. 240.

Dass die gegenseitige Lage zweier Körper im Allgemeinen nicht mehr veränderlich ist, wenn in der Oberfläche O des einen sechs Ecken, oder überhaupt sechs bestimmte Punkte A, B, C, D, E, F des andern k enthalten seyn sollen, dies lässt sich auch durch folgende Betrachtung einsehen.

1) Sollen nur A, B und C sich in der Fläche O befinden, so kann der Ort von A beliebig in O genommen werden; B ist dann irgend ein Punkt in dem

änderlicher Länge sind und unbeweglichen Punkten zu begegnen genöthigt sind, so ist das Vieleck, wenn es auf eine Ebene beschränkt ist, gleichfalls unbeweglich.

Denn für das Gleichgewicht jeder Seite hat man zwischen den Kräften, die man an ihr in der Ebene des Vielecks anbringt, und den drei Pressungen, welche sie dann von dem unbeweglichen Punkte, dem sie begegnen muss, und an ihren beiden Enden von den anstossenden Seiten erleidet, drei Gleichungen. Erstere, von dem unbeweglichen Punkte bewirkte Pressung ist auf der Seite normal und nur ihrer Intensität nach unbekannt. Letztere zwei Pressungen kennt man aber auch ihrer Richtung nach nicht. Die Gesammtzahl aller der von letztern Pressungen herrührenden Stücke ist daher $= 2n$, die Zahl der von erstern Pressungen herrührenden $= n$, die Zahl der Gleichungen aber $= 3n$. Mithin herrscht Unbeweglichkeit.

Ist ferner das Vieleck nicht in einer Ebene enthalten, so ist die Anzahl der unbekannten Stücke (Intensitäten und Winkel) wegen der Pressungen der unbeweglichen Punkte auf die an ihnen beweglichen Seiten ersichtlich $= 2n$, und die wegen der Pressungen an den Ecken, $= 3n$; die Anzahl der Gleichungen aber ist $= 5n$, nämlich 5 für jede Seite, da, wie sich leicht zeigen lässt, das Gleichgewicht zwischen Kräften im Raume, welche auf Punkte wirken, die in einer Geraden liegen, schon durch 5 Gleichungen bedingt ist. Das Vieleck ist daher auch in diesem Falle unbeweglich.

Curve α liegen und darin fortgehen, wobei auch die übrigen Punkte $B,..E$ nicht mehr beliebige, sondern, eben so wie α, von der Gestalt der Fläche O und der gegenseitigen Lage der 5 Punkte $A,...E$ abhängige Curven beschreiben werden.

4) Ist endlich bei dieser bestimmten Bewegung von k der sechste Punkt F in O getreten, so hört mit der Bedingung, dass auch F in O bleiben soll, die Beweglichkeit von k völlig auf.

§. 241.

Aus den voranstehenden Betrachtungen ergeben sich leicht einige Fälle, in denen einem Systeme von weniger als 6 Punkten, die in unabänderlichen Entfernungen von einander sind, im Allgemeinen keine Bewegung mehr gestattet ist. Diese Fälle sind:

1) bei einem Systeme von drei Punkten, wenn ein Punkt unbeweglich, ein zweiter in einer gegebenen Linie und der dritte in einer gegebenen Fläche beweglich ist, oder

2) wenn die drei Punkte in gegebenen Linien beweglich sind (vergl. §. 203.);

3) bei einem Systeme von vier Punkten, wenn ein Punkt unbeweglich und die drei andern in gegebenen Flächen beweglich sind, oder

4) wenn zwei Punkte in gegebenen Linien und die zwei übrigen in gegebenen Flächen beweglich sind;

5) bei einem Systeme von fünf Punkten, wenn ein Punkt in einer gegebenen Linie und die vier andern in gegebenen Flächen beweglich sind.

Die zwei ersten dieser Fälle erhellen aus Nr. 1., der dritte und vierte aus Nr. 2. und der fünfte aus Nr. 3. des vor. §.

§. 242.

Wenn bei einem Systeme von n durch Berührung mit einander verbundenen Körpern, deren jeder an sich frei beweglich ist, die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich seyn soll, so müssen sie sich in wenigstens $6(n-1)$ Punkten berühren (§. 238.). Ob diese Unveränderlichkeit der Lage in irgend einem bestimmten Falle wirklich statt findet, oder nicht, lässt sich im Allgemeinen wohl nicht anders beurtheilen, als dass man die $6(n-1)$ in den Berührungen vorkommenden Pressungen aus den $6n$ ursprünglichen Gleichungen des Gleichgewichts eliminirt. Denn je nachdem dann 6 oder mehr als 6 Gleichungen übrig bleiben, ist die gegenseitige Lage constant oder veränderlich. Indessen giebt es, so lange nicht dergleichen Umstände, wie in §. 193. bemerkt worden, eintreten, mehrere specielle Fälle, in denen man über die gegenseitige Beweglichkeit ohne vorangegangene Rechnung entscheiden kann. So müssen sich z. B. 3 Körper in wenigstens $6 \times 2 = 12$ Punkten berühren, wenn sie nicht mehr an einander sollen verschoben werden können. Auch findet in der That gegenseitige Unbeweglichkeit, im Allgemeinen wenigstens, statt, wenn der erste dem zweiten in 6, und der zweite dem dritten ebenfalls in 6 Punkten begegnet; nicht mehr aber, wenn der erste den zweiten in 7, und der zweite den dritten in 5 Punkten berührt. Denn hängen dann auch der erste und zweite Körper fest zusammen, so ist doch der dritte an dem zweiten verschiebbar.

Ueberhaupt leuchtet ein, dass, je gleichmässiger die $6(n-1)$ oder mehrern Berührungen unter den n Körpern vertheilt sind, um so mehr zu erwarten steht, dass die Körper unbeweglich gegen einander seyn wer-

den. Im Allgemeinen wird man sich daher immer von der gegenseitigen Unbeweglichkeit versichert halten können, wenn von den n sich, in 6 $(n-1)$ oder mehreren Punkten berührenden Körpern je zwei sich in gleichviel Punkten berühren.

Wenn von n Körpern je zwei sich in m Punkten berühren, so ist die Anzahl aller Berührungen $= \frac{1}{2} mn(n-1)$. Ist folglich bei diesem Systeme $\frac{1}{2} mn(n-1) =$ oder $> 6(n-1)$ und daher $mn =$ oder > 12, so ist die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich.

Wenn demnach

von 12 *oder mehr Körpern je zwei sich in* 1 *Punkte*
oder von 6 — — — — — — — 2 *Punkten*
— — 4 — — — — — — — 3 —
— — 3 — — — — — — — 4 —
— — 2 — — — — — — — 6 —

berühren, so kann, ohne dass Berührungen wegfallen, die gegenseitige Lage der Körper nicht geändert werden.

§. 243.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich bei einem Systeme von Curven, die in einer Ebene beweglich sind, anstellen. Das Gleichgewicht zwischen Kräften, die in einer Ebene auf ein darin bewegliches System fest mit einander verbundener Punkte, oder auf eine in der Ebene bewegliche Curve von unveränderlicher Gestalt wirken, erfordert die Erfüllung von drei Gleichungen. Bei einem Systeme von n Curven, die sich in p Punkten berühren, hat man daher $3n$ Gleichungen, worin p unbekannte Pressungen vorkommen. Aus diesen $3n$ Gleichungen lassen sich zuerst 3 Gleichungen folgern, welche dem Gleichgewichte aller n Curven, als wären sie fest mit einander verbunden, angehören; und wenn

sich ausser diesen drei noch andere von Pressungen freie Gleichungen finden lassen, so sind dies die Bedingungen des Gleichgewichts wegen statt findender gegenseitiger Beweglichkeit der Curven in der Ebene. Eine solche Beweglichkeit giebt es daher immer, wenn $3n - \rho > 3$, also $\rho < 3(n-1)$, d. h. wenn sich die n Curven in weniger als $3(n-1)$ Punkten berühren. Bei $3(n-1)$ und mehrern Berührungen dagegen, und wenn je zwei Curven sich in gleichviel Punkten berühren, herrscht im Allgemeinen, nach ähnlichen Schlüssen, wie im vor. §., gegenseitige Unbeweglichkeit. Berühren sich daher je zwei Curven in m Punkten, und ist folglich die Zahl aller Berührungen $= \frac{1}{2}mn(n-1)$, so giebt es keine gegenseitige Beweglichkeit mehr, wenn $\frac{1}{2}mn(n-1) =$ oder $> 3(n-1)$, d. i. wenn $mn =$ oder > 6, und wir ziehen daraus den Schluss:

Wenn in einer Ebene von 6 *Curven je zwei sich in* 1 *Punkte, oder von* 3 *Curven je zwei sich in* 2 *Punkten, oder wenn* 2 *Curven sich in* 3 *Punkten berühren, so können weder die* 6, *noch die* 3, *noch die* 2 *Curven in der Ebene dergestalt an einander verschoben werden, dass sie einander in eben so viel Punkten, als anfänglich, zu berühren fortfahren,* — jedoch mit Ausnahme besonderer Formen der Curven; ist z. B. die eine von zwei Curven ein Kreis, so bleibt gegenseitige Beweglichkeit, in wieviel Punkten sie auch von der andern berührt werden mag.

---

§. 244.

Die Art und Weise über die gegenseitige Beweglichkeit mit einander verbundener Körper zu entscheiden, kann insbesondere dazu nützen, um bei irgend

dadurch noch vereinfachen, dass man die Glieder, welche nicht Pressungen, sondern Kräfte enthalten, gleich anfangs weglässt und aus den somit abgekürzten Gleichungen die Pressungen, oder vielmehr die Verhältnisse zwischen denselben, eliminirt. Die Pressungen selbst endlich werden beim Gleichgewichte der beweglich gewordenen Figur jederzeit unbestimmt.

§. 252.

Die Unbeweglichkeit, welche statt findet, wenn die Anzahl der in den Gleichungen vorkommenden Pressungen eben so gross, als die der Gleichungen selbst ist, ist von der Beschaffenheit, dass sie sogleich aufhört, wenn nur eines der unveränderlich gesetzten Stücke der Figur, es heisse a, veränderlich angenommen wird. Denkt man sich nun die Figur in die Bewegung versetzt, die durch die Annahme, dass a veränderlich seyn soll, möglich wird, so werden dabei je zwei zunächst auf einander folgende Werthe von a im Allgemeinen von einander verschieden, und nur dann einander gleich seyn, wenn a ein Maximum oder Minimum geworden ist. Es wird folglich, wenn man das a, sobald es diesen seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht hat, wieder unveränderlich werden lässt, der Figur eine, obwohl unendlich kleine, Beweglichkeit übrig bleiben.

Die Bedingungsgleichung $a = 0$, bei welcher die ohnedies unbewegliche Figur Beweglichkeit erhalten soll, kann daher, im Allgemeinen wenigstens, keine andere Relation zwischen den Theilen der Figur ausdrücken, als diejenige, bei welcher a seinen grössten oder kleinsten Werth hat, und wobei die Figur noch um ein unendlich Geringes verrückbar ist.

so muss auch jede Ecke, jede Kante und jede Fläche besonders im Gleichgewichte seyn.

Auf jede Ecke wirken die unmittelbar an ihr angebrachten Kräfte, die Pressungen von den angränzenden Kanten und die Pressungen von den Flächen, in denen sie zugleich sich befindet. Das Gleichgewicht an jeder Ecke zwischen allen diesen Kräften wird durch 3 Gleichungen ausgedrückt, also an allen e Ecken durch $3e$ Gleichungen.

Das Gleichgewicht an jeder Kante ist schon dargestellt, wenn wir die zwei Pressungen, die jede Kante auf die zwei Ecken an ihren Enden ausübt, einander gleich und entgegengesetzt annehmen.

Das Gleichgewicht an jeder Fläche endlich zwischen den Pressungen, welche sie von den in ihr befindlichen Ecken erleidet, führt zu 3 Gleichungen (§. 73.), da diese Pressungen auf der Fläche normal und daher unter sich parallel sind, also das Gleichgewicht an allen f Flächen zu $3f$ Gleichungen.

Man hat demnach in Allem $3e + 3f$ Gleichungen, aus denen aber noch die darin vorkommenden Pressungen eliminirt werden müssen. Diese sind erstlich die k Pressungen der eben so viel Kanten und zweitens $2k$ Pressungen der Flächen. Denn jede Fläche erleidet so viele Pressungen, als sie Ecken, also auch so viele, als sie Kanten hat, und da jede Kante zweien Flächen gemeinschaftlich zugehört, so ist die Anzahl aller Pressungen der Flächen gleich der doppelten Anzahl der Kanten. In Allem sind es daher $3k$ Pressungen. Die Zahl der nach Elimination der Pressungen übrig bleibenden Gleichungen ist folglich $= 3e + 3f - 3k = 6$, da nach Euler's Theorem $e + f - k = 2$ ist. Die Theile des Systems haben mithin keine ge-

genseitige Beweglichkeit, und wir schliessen hieraus den übrigens schon bekannten Satz:

Sind sämmtliche Kanten eines Polyeders gegeben, so lassen sich damit alle übrigen Stücke desselben bestimmen.

Doch finden von jener Unbeweglichkeit und mithin auch von diesem Satze in speciellen Fällen Ausnahmen statt. Eine solche macht z. B. ein Prisma; denn sind bloss die Kanten desselben unveränderlich, so kann, wenn die eine Grundfläche unbeweglich angenommen wird, die Richtung der einander parallelen Seitenkanten jede beliebige seyn.

§. 246.

Ein Polyeder ist ein System zusammenhängender ebener Vielecke im Raume. Projiciren wir jetzt ein dergleichen System auf eine Ebene, oder, was dasselbe ist, construiren wir in einer Ebene ein System von Vielecken, bei welchem, eben so wie beim Polyeder, jede Kante zwei Vielecken immer zugleich angehört, so ist wiederum $e + f - k = 2$. Dabei wird aber nur in besondern Fällen durch die Kanten allein alles Uebrige bestimmt seyn. Denn nimmt man die Kanten wiederum von unveränderlicher Länge an, und sollen Kräfte, die man in der Ebene an den Ecken anbringt, im Gleichgewichte seyn, so hat man für jede Ecke zwischen den unmittelbar auf sie wirkenden Kräften und den Pressungen von den angränzenden Kanten zwei Gleichungen, also zusammen $2e$ Gleichungen, wenn man die zwei Pressungen, die jede Kante auf die zwei an sie stossenden Ecken ausübt, schon von vorn herein einander gleich und entgegengesetzt annimmt. Aus diesen $2e$ Gleichungen die k Pressungen der Kanten

in einer Geraden, so reicht schon die kleinste Kraft hin, um A aus der Geraden BD, jedoch nur um ein unendlich Weniges, zu entfernen.

§. 254.

Aufgabe. Die Ecken eines ebenen Vierecks $ABCD$, (Fig. 66.), welches Seiten von constanter Länge, aber veränderliche Winkel hat, sind in unbeweglichen in der Ebene des Vierecks enthaltenen Linien f, g, h, i beweglich, und daher das Viereck selbst im Allgemeinen unbeweglich (§. 247.). Die Bedingung, unter welcher es beweglich wird, und damit die Bedingung zu finden, unter welcher, wenn eine Seite des Vierecks veränderlich gesetzt wird, dieselbe ihren grössten oder kleinsten Werth erhält.

Auflösung. Man bringe an den Ecken A, B, C, D resp. die Kräfte P, Q, R, S an und nenne p, q, r, s ihre Richtungen. Die Pressungen, welche dann die Ecken von den Linien, in denen sie beweglich sind, erleiden, und welche daher auf den Linien selbst normal sind, nennen T, U, V, W, ihre Richtungen t, u, v, w. Werden nun die Seiten AB, BC, CD, DA des Vierecks resp. mit a, b, c, d bezeichnet, so hat man (§. 220. zu Ende) für das Gleichgewicht zwischen den auf die Ecken wirkenden Kräften und Pressungen die Gleichungen:

$$\frac{P \sin dp + T \sin dt}{\sin da} = \frac{Q \sin bq + U \sin bw}{\sin ab},$$

oder, weil t, u, v, w auf f, g, h, i normal sind:

$$\frac{P \sin dp + T \cos df}{\sin da} = \frac{Q \sin bq + U \cos bg}{\sin ab},$$

$$\gamma = 2 + \varepsilon + 2\zeta + 3\eta + \ldots,$$

woraus wir schliessen, dass bei derselben Forderung unter den Flächen des Systems wenigstens zwei Dreiecke seyn müssen, und zwar dann nicht mehr als zwei Dreiecke, wenn die übrigen Flächen bloss Vierecke sind. Dies ist z. B. der Fall, wenn man aus 6 Punkten A, B, ... F 2 Dreiecke ABC, DEF und 3 Vierecke $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$ construirt, wobei $e=6$, $b=9$ und $f=5$ ist. Zwei Dreiecke ABC und DEF in einer Ebene, deren Ecken durch drei Gerade AD, BE und CF von unveränderlicher Länge verbunden sind, haben demnach eine unveränderliche Lage gegen einander; oder allgemeiner noch ausgedrückt:

Werden von zwei in einer Ebene enthaltenen und darin beweglichen Figuren 3 Punkte der einen mit 3 Punkten der andern durch 3 Gerade von unveränderlicher Länge verbunden, so ist damit ihre gegenseitige Beweglichkeit aufgehoben. — Bei zwei Figuren im Raume geschah dieses erst durch 6 Verbindungslinien (§. 239. zu Ende.).

Ein anderes Beispiel dieser Art ist folgendes: Von zwei Vierecken $ABCD$ und $FGHI$ (Fig. 64.) in einer Ebene verbinde man die Ecken des einen mit denen des andern durch die 4 Geraden AF, BG, CH, DI. Hierdurch entstehen 4 neue Vierecke AG, BH, CI, DF, welche in Verbindung mit den 2 anfänglichen Vierecken und unter der Voraussetzung, dass sämmtliche 12 Linien von unveränderlicher Länge sind, ein noch veränderliches System bilden, weil Dreiecke fehlen. Fügt man aber noch eine Diagonale eines dieser Vierecke, als eine Linie von constanter Länge, hinzu, z. B. die Diagonale AC des Vierecks $ABCD$, so verwandelt sich dieses Viereck in zwei Dreiecke und es

denen die Seiten des zweiten von den Ecken des ersten getheilt werden, der Einheit gleich seyn.

b. Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich auch leicht auf rein geometrischem Wege darthun. Man nehme in $f, g, \ldots$ unendlich nahe bei $A, B \ldots$ die Punkte A', B', C', D' dergestalt, dass I. $A'B' = AB$, II. $B'C' = BC$, III. $C'D' = CD$, so muss, wenn das Viereck $ABCD$ mit constanten Seitenlängen unendlich wenig im Vierecke $fghi$ verrückbar seyn soll, auch IV. $D'A' = DA$ seyn. Da also $A'B' = AB$, und weil, wegen der rechten Winkel $A'AL$ und $B'BL$, $A'L = AL$ und $B'L = BL$ ist, so ist der Winkel $A'LB' = ALB$, folglich der Winkel $ALA' = BLB'$, und es verhält sich daher

$$AA' : BB' = AL : BL.$$

Eben so fliessen aus II., III. und IV. die Proportionen:

$$BB' : CC' = BM : CM,$$
$$CC' : DD' = CN : DN,$$
$$DD' : AA' = DK : AK.$$

Zur Beweglichkeit ist aber das Zusammenbestehen der 4 Gleichungen I.,..IV. erforderlich, folglich auch das Zusammenbestehen der 4 daraus abgeleiteten Proportionen; diese aber, mit einander verbunden, führen zu der in *a.* erhaltenen Gleichung.

c. Der Winkel $A'B'C'$, in welchen bei Verrückung des Vierecks der Winkel ABC übergeht, ist $= A'B'L + LB'M + MB'C'$. Nach *b.* sind aber die Dreiecke $A'B'L$ und $MB'C'$ den Dreiecken ABL und MBC gleich und ähnlich. Hiermit wird der Winkel $A'B'C' = ABL + LB'M + MBC = ABC + LB'M$. Der Winkel ABC erhält daher bei der Verrückung das Increment $LB'M$, und bleibt folglich nur dann unge-

den, und jeder der Punkte F, G, H,... in die Ebene der zwei auf einander folgenden Seiten des Vielecks lmn... fällt, in welchen die Ecken der durch den Punkt gehenden Seite des Vielecks ABC... sich bewegen können.

Als ein besonderer Fall hiervon ist der zu betrachten, wenn die Geraden l, m, n,... einander parallel sind. Man denke sich dieselben vertical und nehme grösserer Einfachheit willen die Punkte F, G, H,... in einer und derselben horizontalen Ebene μ enthalten an, so dass sie in den Durchschnitten von μ mit den verticalen Ebenen lm, mn, etc. liegen, mit welchen Durchschnitten anfangs auch die Seiten des Vielecks ABC... coincidiren mögen. Um für diesen Fall die Unbeweglichkeit der Figur statisch zu beweisen, lasse man auf die Seiten des Vielecks Kräfte nach gleichfalls verticalen Richtungen wirken. Alsdann giebt es für jede Seite des Vielecks 2 Gleichungen, also überhaupt $2n$ Gleichungen, und eben so gross ist die Zahl der verticalen Pressungen, nämlich n Pressungen, welche die Seiten von den unbeweglichen Punkten erleiden, und eben so viel Pressungen an den n Ecken. Mithin ist die Figur unbeweglich.

§. 249.

In den vorigen zwei §§. liessen wir die Ecken eines Vielecks in unbeweglichen Geraden beweglich seyn, und nahmen überdies an, das einemal, dass die Seiten des Vielecks von constanter Länge seyen, das anderemal, dass die Seiten durch unbewegliche Punkte gehen. Beseitigen wir jetzt die unbeweglichen Geraden und lassen letztere zwei Bedingungen zugleich statt finden, so dass die Seiten eines Vielecks von unver-

änderlicher Länge sind und unbeweglichen Punkten zu begegnen genöthigt sind, so ist das Vieleck, wenn es auf eine Ebene beschränkt ist, gleichfalls unbeweglich.

Denn für das Gleichgewicht jeder Seite hat man zwischen den Kräften, die man an ihr in der Ebene des Vielecks anbringt, und den drei Pressungen, welche sie dann von dem unbeweglichen Punkte, dem sie begegnen muss, und an ihren beiden Enden von den anstossenden Seiten erleidet, drei Gleichungen. Erstere, von dem unbeweglichen Punkte bewirkte Pressung ist auf der Seite normal und nur ihrer Intensität nach unbekannt. Letztere zwei Pressungen kennt man aber auch ihrer Richtung nach nicht. Die Gesammtzahl aller der von letztern Pressungen herrührenden Stücke ist daher $= 2n$, die Zahl der von erstern Pressungen herrührenden $= n$, die Zahl der Gleichungen aber $= 3n$. Mithin herrscht Unbeweglichkeit.

Ist ferner das Vieleck nicht in einer Ebene enthalten, so ist die Anzahl der unbekannten Stücke (Intensitäten und Winkel) wegen der Pressungen der unbeweglichen Punkte auf die an ihnen beweglichen Seiten ersichtlich $= 2n$, und die wegen der Pressungen an den Ecken, $= 3n$; die Anzahl der Gleichungen aber ist $= 5n$, nämlich 5 für jede Seite, da, wie sich leicht zeigen lässt, das Gleichgewicht zwischen Kräften im Raume, welche auf Punkte wirken, die in einer Geraden liegen, schon durch 5 Gleichungen bedingt ist. Das Vieleck ist daher auch in diesem Falle unbeweglich.

$$DD' : AA' = FD : FA,$$
$$AA' : BB' = GA : GB,$$
$$BB' : CC' = HB : HC.$$

Damit nun auch die um I drehbare Linie d durch C' und D' gehen könne, muss sich verhalten:

$$CC' : DD' = IC : ID.$$

Hieraus aber folgt in Verbindung mit den drei vorhergehenden Proportionen die obige Bedingungsgleichung. — Man bemerke noch, dass die nachherigen Oerter A', B',.. von A, B,.. abwechselnd über und unter die horizontale Ebene fallen, wenn, wie in der Figur, die unbeweglichen Punkte F, G,.. in den Linien a, b,.. zwischen den Begegnungspunkten A, B,.. dieser Linien, nicht ausserhalb derselben, liegen. Uebrigens sieht man leicht, dass die Beweglichkeit, wenn eine solche statt findet, hier nicht eine unendlich kleine ist, sondern dass bei der vorausgesetzten unbestimmten Länge der Linien a, b,.. die Punkte A, B,.. jeden beliebigen Abstand von der horizontalen Ebene erreichen können.

b. Die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht lässt sich auch durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entwickeln. Sind nämlich P', Q',.. die Oerter, welche die Angriffspunkte P, Q,.. der Kräfte p, q,.. nach einer unendlich kleinen Verrückung des Systems einnehmen, so sind PP', QQ',... vertical, fallen daher mit den Richtungen von p, q,.. zusammen, und es ist folglich beim Gleichgewichte:

$$PP' \cdot p + QQ' \cdot q + RR' \cdot r + SS' \cdot s = 0.$$

Nun verhält sich

$$PP' : AA' = FP : FA,$$
$$AA' : QQ' = GA : GQ,$$

mithin $PP' : QQ' = GA \,.\, FP : FA \,.\, GQ$,

u. s. w. übereinstimmend mit dem bereits Gefundenen.

c. Zu ganz analogen Resultaten wird man geführt, wenn statt 4 Linien, 3 oder mehr als 4 Linien auf die vorige Weise mit einander verbunden sind und um unbewegliche Punkte gedreht werden können. Für 3 Linien insbesondere, BC, CA, AB, welche resp. um die Punkte F, G, H drehbar sind, ergiebt sich als Bedingung der Beweglichkeit:

$$\frac{FB}{FC} \cdot \frac{GC}{GA} \cdot \frac{HA}{HB} = 1.$$

Nur also, wenn F, G, H in gerader Linie liegen, (vergl. §. 232. *c.*), ist das Dreieck ABC beweglich. Und in der That lässt es sich dann um die Gerade FGH, als um eine Axe drehen. Die virtuellen Geschwindigkeiten PP', QQ', RR' sind alsdann den Abständen der Punkte P, Q, R von dieser Axe proportional, und die Gleichung $PP' \,.\, p + \ldots = 0$, d. i. die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht, drückt, wie zu erwarten stand, aus, dass das Moment der Kräfte in Bezug auf die Gerade, um welche das Dreieck drehbar ist, null seyn muss.

d. Eben so wie das Dreieck wird auch das Viereck und jedes andere Vieleck, sobald die unbeweglichen Punkte ihrer Seiten in einer Geraden liegen, um diese Gerade drehbar. Dasselbe giebt auch die Bedingungsgleichung zu erkennen, da immer das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten eines ebenen Vielecks von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, der (negativen) Einheit gleich ist. Indessen ist diese Beweglichkeit bei Vielecken von mehr als drei Seiten nur als ein specieller Fall zu betrachten,

der sich dadurch noch auszeichnet, dass das anfänglich ebene Vieleck ein solches auch während der Bewegung bleibt, und bei einer nur unendlich kleinen Bewegung seine Form nicht ändert.

e. Zwischen der jetzigen Aufgabe und der vorhergehenden findet in gewissem Sinne ein duales Verhältniss statt. Denn so wie dort die Ecken eines Vielecks in unbeweglichen Geraden beweglich waren, so sind hier die Seiten eines Vielecks um unbewegliche Punkte drehbar. Diese Dualität der beiden Aufgaben giebt sich auch in der Aehnlichkeit der Bedingungsgleichungen (a) und (A) zu erkennen. Denn aus der letztern Gleichung erhält man die erstere, wenn man die grossen Buchstaben in die entsprechenden kleinen verwandelt und von den durch af, ag,... ausgedrückten Winkeln die Cosinus nimmt.

Auf gleiche Art lässt sich aus der Gleichung (B) für's Gleichgewicht der auf beliebige Punkte P, Q,.. der Linien a, b,.. und rechtwinklig auf der Ebene der letztern wirkenden Kräfte p, q,.. die Gleichung für's Gleichgewicht der nach beliebigen Richtungen p q,.. auf die Punkte A, B,.. und in der Ebene der letztern wirkenden Kräfte P, Q,.. herleiten. Es ist nämlich diese Gleichung:

(b) $F.P\cos fp+G.Q\cos gq+H.R\cos hr+I.S\cos is=0$,

wo $F:G=\cos ga:\cos fa$, $G:H=\cos hb:\cos gb$, etc. Den Beweis dafür wird man sich leicht selbst entwickeln.

Noch eine Betrachtung, die auf beide Aufgaben gleich anwendbar ist, die ich aber der Kürze wegen nur in Bezug auf die letztere anstellen will, enthält der folgende §.

§. 259.

Sey ABC (Fig. 68.) das vorhin betrachtete, von den Linien a, b, c gebildete Dreieck mit den unbeweglichen Punkten F, G, H in a, b, c. Diese Punkte sollen nicht in einer Geraden liegen, und daher das Dreieck, welches man sich horizontal denke, unbeweglich seyn. Sind nun p, q, r die an den Punkten P, Q, R der a, b, c angebrachten Kräfte; t, u, v die dadurch in A, B, C erzeugten Pressungen von b, c, a auf c, a, b, und setzt man noch

$$\frac{FB}{FC} = f, \frac{GC}{GA} = g, \frac{HA}{HB} = h,$$

$$\frac{FP}{FC} = f', \frac{GQ}{GA} = g', \frac{HR}{HB} = h',$$

so hat man, wie in §. 257., die Gleichungen:

$$f'p - v + fu = 0, \quad g'q - t + gv = 0, \quad h'r - u + ht = 0.$$

Hieraus folgt: $g'q - t + g(f'p + f(h'r + ht)) = 0,$

d. i. $gf'p + g'q + fgh'r = (1-m)\,t,$

wo $m = fgh$, und eben so

$$hg'q + h'r + ghf'p = (1-m)\,u,$$

$$fh'r + f'p + hfg'q = (1-m)\,v. \qquad \text{(M)}$$

Wir wollen uns nun über die Art und Weise, wie sich nach diesen Formeln die von den Kräften p, q, r entstehenden Pressungen t, u, v in A, B, C vertheilen, näher zu belehren suchen. Um unsere Aufmerksamkeit auf einen bestimmten Fall zu richten, wollen wir annehmen, dass, wie in der Figur, die Punkte F, G, H ausserhalb B und C, C und A, A und B auf der Seite von B, C, A liegen. Alsdann sind f, g, h, folglich auch m, zwischen 0 und 1 enthalten, und daher f, g, h und $1-m$ positiv. Wir wollen ferner die Punkte

P, Q, R mit B und C, C und A, A und B auf einerlei Seite von F, G, H liegend annehmen, so dass f', g', h' positiv werden. Endlich wollen wir noch die Kräfte p, q, r mit einerlei Zeichen behaftet, sie selbst also nach einerlei Seite gerichtet, etwa von oben nach unten, annehmen. Zufolge der Gleichungen (M) werden dann auch die Pressungen t, u, v nach unten gerichtet seyn.

In der Figur sind für diesen Fall die Linien a, b, c als Stäbe gezeichnet worden, die in A, B, C dergestalt über einander weggehen, dass sie daselbst, bei den nach unten gerichteten Pressungen t, u, v, gegen einander drücken, nicht von einander sich zu trennen streben, und wir somit nicht nöthig haben, sie unzertrennlich mit einander verbunden anzunehmen (§. 189.).

Sey nun zuerst $p=0$, $r=0$, $g'=1$, und wirke daher nur auf den Stab b im Punkte A eine Kraft $=q$. Hiermit werden die Gleichungen (M):

$$q=(1-m)\,t,\quad hq=(1-m)\,u,\quad hfq=(1-m)\,v,$$

also $t>q$. Diese Verschiedenheit der Pressung t von der Kraft q scheint einen Widerspruch zu enthalten. Denn man sollte meinen, dass, wenn an dem Punkte A des Stabes b, und sonst nirgend wo anders am Systeme, eine Kraft q wirkt, die dadurch bei A von b auf c hervorgebrachte Pressung, sowie die von c auf b rückwärts ausgeübte Pressung, eben so gross als q selbst seyn müssten. Dieser Schluss wäre nun allerdings richtig, sobald die Stäbe b und c bloss in A mit einander verbunden wären. Allein sie sind es noch durch den Stab a, welcher b und c in C und B berührt, und hierdurch geschieht es, dass die in A von b auf c zunächst erzeugte und daher $=q$ zu setzende

dieses im Allgemeinen unbewegliche System (§. 248.) eine unendlich kleine Beweglichkeit erlangt.

Auflösung. Die gesuchte Bedingung ist offenbar einerlei mit derjenigen, unter welcher die Seiten des Dreiecks ABC sich um die Punkte F, G, H drehen, und die Ecken desselben in Curven fortgehen, deren Tangenten l, m, n sind. Letztere Bedingung aber, und folglich auch die erstere, besteht nach §. 232. C. in der Erfüllung der Gleichung:

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AH}{HB}=\frac{MA}{AN}\cdot\frac{NB}{BL}\cdot\frac{LC}{CM}.$$

§. 261.

Aufgabe. Man hat ein in einer Ebene bewegliches Viereck $ABCD$ (Fig. 69.) mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln. Zwei Punkte F und H in zwei einander gegenüberliegenden Seiten AB und CD sind unbeweglich, und damit das Viereck selbst im Allgemeinen unbeweglich (§. 247. Zus.). Die Lage der Punkte F und H so zu bestimmen, dass dem Viereck noch eine unendlich kleine Beweglichkeit übrig bleibt.

Auflösung. Man lasse auf beliebige Punkte der AB Kräfte wirken, deren Moment in Bezug auf F, $=p_1$ sey; desgleichen bringe man irgendwo an CD Kräfte an, deren Moment in Bezug auf H, r_1 heisse. Die Pressungen, welche deshalb die Seite DA in D und A auf die Seiten CD und AB ausübt, und welche in der Richtung von DA einander gleich und entgegengesetzt sind, nenne man t und $-t$; die Pressungen von BC auf die Enden B und C von AB und CD seyen eben so $=v$ und $=v$. Alsdann hat man für's Gleichgewicht

§. 253.

Aufgabe. Die Bedingung zu finden, unter welcher ein Winkel C eines ebenen Vierecks $ABCD$ (Fig. 65.), dessen Seiten unveränderliche Längen haben, seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht.

Auflösung. Man nehme den Winkel C unveränderlich an, lasse die Ecken C und D, und somit auch B, unbeweglich werden, und untersuche nun, in welchem speciellen Falle der Ecke A Beweglichkeit noch übrig bleibt. Zu dem Ende bringe man an A eine Kraft P nach einer beliebigen Richtung AE in der Ebene des Vierecks an. Die Pressungen, welche dabei die Ecke A von den Seiten AB und AD erfährt, seyen b und d, so hat man für's Gleichgewicht von A die zwei Gleichungen:

$$P \sin DAE = b \sin BAD, \quad P \sin EAB = d \sin BAD.$$

Aus diesen können aber die Pressungen b und d nur dann herausgehen, wenn $\sin BAD = 0$ ist, also wenn A mit B und D in gerader Linie liegt. Dies ist demnach die Bedingung, unter welcher die Ecke A noch eine, wiewohl unendlich kleine, Beweglichkeit hat, und wo folglich der Winkel C, wenn er veränderlich betrachtet wird, seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht. Man gewahrt übrigens leicht, dass C ein Maximum oder Minimum ist, nachdem A in der Geraden BD zwischen oder ausserhalb B und D liegt.

Man bemerke noch, dass, wenn $\sin BAD = 0$, jede der zwei Gleichungen des Gleichgewichts sich auf $P = 0$ reducirt; d. h. ist ein beweglicher Punkt A mit zwei unbeweglichen B und D durch Linien von constanten Längen verbunden, und liegt A mit B und D

F nach dem Durchschnitte *K* der beiden andern Seiten geführten Geraden normal ist. Denn soll das Viereck um *F* und *H* bewegt werden können, so muss es auch, wenn *F* frei gelassen wird, um *C* und *D*, als unbewegliche Punkte, so beweglich seyn, dass die Länge von *HF* unverändert bleibt, dass folglich *F* ein auf *HF* normales Element beschreibt; und da dieses Element zufolge des angeführten Satzes auch auf *FK* normal ist, so müssen *H*, *F* und *K* in einer Geraden liegen.

c. Das Viereck *ABCD* mit den zwei Punkten *F*, *H* in den Seiten *AB*, *CD* ist vollkommen bestimmt und kann construirt werden, wenn die Längen der 7 Linien *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, *AF*, *DH*, *FH* gegeben sind. Lässt man nur sechs dieser Längen gegeben seyn und construirt mit ihnen das Viereck so, dass sich *DA*, *BC*, *FH* in einem Punkte schneiden, so hat dabei die siebente unbestimmt gelassene Länge ihren grössten oder kleinsten Werth (§. 252.). Diess führt uns zu folgenden zwei Sätzen:

1. Bei einem Vierecke *FBCH* mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln ist der gegenseitige Abstand *AD* zweier gegebenen Punkte *A* und *D* in zwei gegenüberliegenden Seiten *FB* und *CH* ein Maximum oder Minimum, wenn die Gerade *AD* den Durchschnitt *K* des andern Paares gegenüberliegender Seiten *BC* und *HF* trifft.

2. Hat man ein Viereck *FBCH* mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, und bewegt sich bei Veränderung der Winkel ein Punkt *D* in der Seite *CH* so, dass sein Abstand *AD* von einem bestimmten Punkte *A* in der gegenüberliegenden Seite *FB* unveränderlich bleibt, so ist *HD*, so

und eben so $\frac{Q\sin aq + U\cos ag}{\sin ab} = \frac{R\sin cr + V\cos ch}{\sin bc}$,

$$\frac{R\sin br + V\cos bh}{\sin bc} = \frac{S\sin ds + W\cos di}{\sin cd},$$

$$\frac{S\sin cs + W\cos ci}{\sin cd} = \frac{P\sin ap + T\cos af}{\sin da}.$$

Setzt man nun in diesen vier Gleichungen, der in §. 251. gegebenen Vorschrift gemäss, die Kräfte P, Q, R, $S = 0$ und eliminirt hierauf die Pressungen T, U, V, W, so kommt

$$(a)\quad \frac{\cos af}{\cos ag}\cdot\frac{\cos bg}{\cos bh}\cdot\frac{\cos ch}{\cos ci}\cdot\frac{\cos di}{\cos df} = 1,$$

als die gesuchte Bedingung.

§. 255.

Zusätze. *a.* Man errichte in A, B, C, D auf f, g, h, i die 4 Normalen AK, BL, CM, DN. Begegne die 1ste derselben der 2ten in L, die 2te der 3ten in M, die 3te der 4ten in N und die 4te der 1sten in K, so ist $\cos af = \sin LAB$, $\cos ag = \sin ABL$, und es verhält sich daher

$$\cos af : \cos ag = BL : AL,$$

und eben so $\cos bg : \cos bh = CM : BM$,

u. s. w. Hiermit wird die erhaltene Bedingungsgleichung:

$$\frac{AK}{AL}\cdot\frac{BL}{BM}\cdot\frac{CM}{CN}\cdot\frac{DN}{DK} = 1,$$

d. h.: Beschreibt man um das Viereck $ABCD$ ein zweites $KLMN$, dessen Seiten auf den Linien, in denen die Ecken des ersten beweglich sind, normal stehen, so muss das Product aus den Verhältnissen, nach

$FB \sin B$ zu $FA \sin A$ verhalten. Die Kräfte p und p' werden aber noch im Gleichgewichte seyn, wenn man sie nach denselben Richtungen AD und BC in D und C anbringt. Da sie nun alsdann aus demselben Grunde, wie vorhin, in dem Verhältnisse von $HC \sin C$ zu $HD \sin D$ stehen müssen, so muss sich verhalten $FB \sin B : FA \sin A = HC \sin C : HD \sin D$, welches die zu Ende des §. 261. gefundene Gleichung giebt.

2) Ist an einer der beiden Seiten DA und BC des Vierecks, z. B. an BC, in einem beliebigen Punkte Q nach der Richtung QT eine Kraft q angebracht, so zerlege man dieselbe, um ihre Wirkung zu schätzen, in zwei andere q' und q'' nach den Richtungen BC und QO, wo O der Durchschnitt von AB mit CD ist. Die Kraft q'' nach der Richtung QO lässt sich ferner in zwei andere auf B und C nach BO und CO wirkende zerlegen, und ist daher von gar keiner Wirkung, weil in BO und CO die unbeweglichen Punkte F und H liegen. Die nach QT gerichtete Kraft q ist folglich gleichwirkend mit der nach BC gerichteten Kraft $q' = q \frac{\sin TQO}{\sin CQO}$.

3) In dem besondern Falle, wenn AB und CD parallel sind, wird es auch QO mit AB, und daher $q' = q \sin (AB, q) : \sin B$. Alsdann ist folglich die Intensität von q' bloss von der Intensität von q und von dem Winkel AB, q abhängig, d. h. die Wirkung einer an BC im Punkte Q angebrachten Kraft q bleibt ungeändert, wenn die Kraft parallel mit ihrer Richtung an irgend einen andern Punkt von BC verlegt wird.

Dasselbe folgt auch unmittelbar aus der Theorie der Kräftepaare. Denn wirken auf zwei Punkte der Seite BC, oder überhaupt auf zwei Punkte in der

ändert, wenn M mit L zusammenfällt. Eben so wird bewiesen, dass der Winkel BCD nur dann sich nicht ändert, wenn N mit M zusammenfällt; u. s. w. Soll folglich das Viereck ohne Aenderung seiner Winkel verrückbar seyn, so müssen die vier auf f, g,.. in A, B,.. errichteten Perpendikel sich in einem Punkte, er heisse O, schneiden. Dass umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, jederzeit auch Beweglichkeit statt findet, erhellet sogleich aus der Formel in *a.*, in welcher für diesen Fall $AL = AK$, $BM = BL$, etc. ist, aber auch schon daraus, dass, wenn das Viereck mit constant bleibenden Winkeln um den Punkt O um ein unendlich Geringes gedreht wird, die Ecken A, B,.. Normalen auf OA, OB,... beschreiben und folglich in f, g,.. fortrücken.

d. Analoge Resultate, wie wir jetzt für ein Viereck gefunden haben, ergeben sich auch für jedes andere Vieleck. Soll insbesondere ein Dreieck ABC, dessen Seitenlängen constant sind, mit seinen Ecken in den Seiten f, g, h eines unbeweglichen Dreiecks beweglich seyn, so müssen, weil mit den constant gesetzten Seitenlängen eines Dreiecks auch die Winkel desselben unveränderlich werden, die drei in A, B, C auf f, g, h errichteten Perpendikel sich in einem Punkte O schneiden. Das Dreieck ABC ist alsdann um O ein unendlich Weniges drehbar.

Aehnlicher Weise zeigt sich, dass, wenn in einer Ebene zwei Curven in drei Punkten einander berühren und daher unbeweglich gegen einander sind (§. 243.) eine unendlich kleine Beweglichkeit in dem Falle eintritt, wenn die Normalen in den drei Berührungspunkten in einem Punkte zusammentreffen.

am grössten oder kleinsten wird. Fügt man die Linie FA von constanter Länge wieder hinzu, lässt aber ihren Endpunkt A nicht mehr mit der Linie BG in A fest verbunden, sondern darin beweglich seyn, so erhält die Figur gleichfalls Beweglichkeit, und die Linie AG, so wie AB, wird unter derselben Bedingungsgleichung ein Maximum oder Minimum.

b. Sind K, L, M die gegenseitigen Durchschnitte von AB, CD, EF, so ist:

$$\frac{\sin F}{\sin A}=\frac{AK}{FK},\quad \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{CL}{BL},\quad \frac{\sin D}{\sin E}=\frac{EM}{DM},$$

und man kann damit die Bedingungsgleichung auf folgende Weise darstellen:

$$\frac{KA}{AG}\cdot\frac{GB}{BL}\cdot\frac{LC}{CH}\cdot\frac{HD}{DM}\cdot\frac{ME}{EI}\cdot\frac{IF}{FK}=1,$$

Bestimmt man daher in AB, CD, EF drei Punkte G_1, H_1, I_1, von denen G_1 mit K, A, G, B, L; H_1 mit L, C, H, D, M; I_1 mit M, E, I, F, K eine angenannte geometrische Involution bildet, d. h. welche so liegen, dass

$$\frac{KA}{AG}\cdot\frac{GB}{BL}\cdot\frac{LG_1}{G_1K}=-1,\quad \frac{LC}{CH}\cdot\frac{HD}{DM}\cdot\frac{MH_1}{H_1L}=-1,$$
$$\frac{ME}{EI}\cdot\frac{IF}{FK}\cdot\frac{KI_1}{I_1M}=-1,$$

so zieht sich die Bedingungsgleichung zusammen in:

$$\frac{KG_1}{G_1L}\cdot\frac{LH_1}{H_1M}\cdot\frac{MI_1}{I_1K}=-1,$$

und giebt somit zu erkennen, dass G_1, H_1, I_1 in einer Geraden liegen müssen *).

*) Die drei Punkte G_1, H_1, I_1 können durch folgende Construction gefunden werden. Seyen N und O die Durchschnitte von

$$DD' : AA' = FD : FA,$$
$$AA' : BB' = GA : GB,$$
$$BB' : CC' = HB : HC.$$

Damit nun auch die um I drehbare Linie d durch C' und D' gehen könne, muss sich verhalten:

$$CC' : DD' = IC : ID.$$

Hieraus aber folgt in Verbindung mit den drei vorhergehenden Proportionen die obige Bedingungsgleichung. — Man bemerke noch, dass die nachherigen Oerter A', B',.. von A, B,.. abwechselnd über und unter die horizontale Ebene fallen, wenn, wie in der Figur, die unbeweglichen Punkte F, G,.. in den Linien a, b,.. zwischen den Begegnungspunkten A, B,.. dieser Linien, nicht ausserhalb derselben, liegen. Uebrigens sieht man leicht, dass die Beweglichkeit, wenn eine solche statt findet, hier nicht eine unendlich kleine ist, sondern dass bei der vorausgesetzten unbestimmten Länge der Linien a, b,.. die Punkte A, B,.. jeden beliebigen Abstand von der horizontalen Ebene erreichen können.

b. Die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht lässt sich auch durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entwickeln. Sind nämlich P', Q',.. die Oerter, welche die Angriffspunkte P, Q,.. der Kräfte p, q,.. nach einer unendlich kleinen Verrückung des Systems einnehmen, so sind PP', QQ',... vertical, fallen daher mit den Richtungen von p, q,.. zusammen, und es ist folglich beim Gleichgewichte:

$$PP' \cdot p + QQ' \cdot q + RR' \cdot r + SS' \cdot s = 0.$$

Nun verhält sich

$$PP' : AA' = FP : FA,$$
$$AA' : QQ' = GA : GQ,$$

[illegible] die Winkel $90° - \varepsilon$, $90° + \beta$, ... machen. Man bezeichne diese Pressungen resp. mit $2t$, $2u$, $2v$, $2w$, so dass die Pressung $2r$ positiv zu nehmen ist, wenn ihre Richtung in der That durch $90° + \alpha$ bestimmt wird, negativ, wenn sie die entgegengesetzte ist, u. s. w.

Das Gleichgewicht dauert nun fort, wenn wir die unbeweglichen Punkte F, G... wegnehmen und dafür den Pressungen $2r$, $2s$... gleiche Kräfte nach den Richtungen $90° - \varepsilon$, $90° - \beta$... an denselben Stellen F, G... der Seiten anbringen: es dauert noch fort, wenn wir jede dieser Kräfte in zwei mit ihr parallele zerlegen, welche auf die Endpunkte der jedesmaligen Seite wirken. Wir zerlegen daher $2r$ in die zwei damit parallelen Kräfte an A und B:

$$\frac{FB}{AB} \cdot 2t = (1 + a)\, t \text{ und } \frac{AF}{AB} \cdot 2t = (1 - a)\, t,$$

wenn $\frac{FB}{AB} = \frac{1}{2}(1 + a)$, folglich $\frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}(1 - a)$ gesetzt wird, und wo daher

$$\frac{FB - AF}{AB} = a$$

ist. Setzen wir eben so

$$\frac{GC - BG}{BC} = b, \quad \frac{HD - CH}{CD} = c, \quad \frac{IA - DI}{DA} = d,$$

so ist die Kraft $2u$ gleichwirkend mit den zwei ihr parallelen Kräften $(1 + b)\, u$ und $(1 - b)\, u$ an B und C, u. s. w.

Hiernach haben wir es jetzt mit einem Vierecke zu thun, dessen Ecken allein der Wirkung von Kräften ausgesetzt sind; nämlich auf A wirken die Kräfte p, $(1 - d)\, w$, $(1 + a)\, t$; auf B die Kräfte q, $(1 - a)\, t$, $(1 + b)\, u$; u. s. w., und es sind nunmehr die Gleichun-

gen für das Gleichgewicht dieses Systems zu entwickeln. Da wir aber nur die Bedingung der unendlich kleinen Beweglichkeit suchen wollen, so können wir in diesen Gleichungen die ursprünglichen Kräfte $p, \ldots s$ auch weglassen und somit auf A bloss die Kräfte $(1-d)w$ und $(1+a)t$ nach den Richtungen $90° + \delta$ und $90° + \alpha$; an B bloss die Kräfte $(1-a)t$ und $(1+b)u$ nach den Richtungen $90° + \alpha$ und $90° + \beta$; u. s. w. wirkend annehmen. Die Elimination von t, u, v, w aus den Gleichungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte wird uns hierauf zu der gesuchten Bedingung hinführen. Die Gleichungen selbst sind nach §. 220. zu Ende:

$$\Big((1-d)w\sin(90°+\delta-\delta)+(1+a)t\sin(90°+\alpha-\delta)\Big)\sin(\beta-\alpha)$$

$$=$$

$$\Big((1-a)t\sin(90°+\alpha-\beta)+(1+b)u\sin(90°+\beta-\beta)\Big)\sin(\alpha-\delta),$$

d. i.

$$(1)\quad t[\sin(\beta-2\alpha+\delta)+a\sin(\beta-\delta)]$$
$$=(1+b)u\sin(\alpha-\delta)-(1-d)w\sin(\beta-\alpha),$$

und eben so noch drei andere Gleichungen, die sich schon aus (1) durch gehörige Vertauschung der Buchstaben ergeben, nämlich:

$$(2)\quad u[(\sin\gamma-2\beta+\alpha)+b\sin(\gamma-\alpha)]$$
$$=(1+c)v\sin(\beta-\alpha)-(1-a)t\sin(\gamma-\beta),$$

u. s. w. Statt der dritten und vierten Gleichung aber wollen wir diejenigen zwei bei weitem einfacheren Gleichungen gebrauchen, welche ausdrücken, dass die 8 Kräfte $(1\pm a)t$, $(1\pm b)u$, etc., wenn sie parallel mit ihren Richtungen $90° + \alpha$, $90° + \beta$, etc. an einen und denselben Punkt getragen werden, einander, — obwohl eigentlich den Kräften p, q, r, s, — das Gleich-

gewicht halten. Diese zwei Gleichungen, die aus jenen vier Gleichungen durch gehörige Verbindung derselben ebenfalls hervorgehen müssen, sind:

$$t\sin\alpha + u\sin\beta + v\sin\gamma + w\sin\delta = 0,$$
$$t\cos\alpha + u\cos\beta + v\cos\gamma + w\cos\delta = 0,$$

wofür wir, das einemal w, das anderemal v eliminirend, auch setzen können:

$$(3)\quad v\sin(\delta-\gamma) = t\sin(\alpha-\delta) + u\sin(\beta-\delta),$$
$$(4)\quad w\sin(\delta-\gamma) = t\sin(\gamma-\alpha) + u\sin(\gamma-\beta).$$

Es ist nun noch übrig, aus (1), (2), (3), (4) die drei Verhältnisse zwischen t, u, v, w wegzuschaffen. Die Substitution der Werthe von w und v aus (4) und (3) in (1) und (2) verwandelt letztere zwei Gleichungen in:

$$(5)\quad Tt + Uu = 0,\quad (6)\quad T't + U'u = 0,$$

wo
$$T = [\sin(\beta-2\alpha+\delta) + a\sin(\beta-\delta)]\sin(\delta-\gamma) + (1-d)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\alpha)$$
$$U = -(1+b)\sin(\alpha-\delta)\sin(\delta-\gamma) + (1-d)\sin(\gamma-\beta)\sin(\beta-\alpha)$$
$$T' = -(1+c)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\alpha) + (1-a)\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\gamma)$$
$$U' = [\sin(\gamma-2\beta+\alpha) + b\sin(\gamma-\alpha)]\sin(\delta-\gamma) - (1+c)\sin(\beta-\delta)\sin(\beta-\alpha).$$

Zufolge der bekannten Formel

$$(*)\quad \sin f\sin(g-h) + \sin g\sin(h-f) = \sin h\sin(g-f)$$

ist aber

$$\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\alpha) + \sin(\beta-2\alpha+\delta)\sin(\delta-\gamma) = \sin(\delta-\alpha)\sin(\beta-\alpha+\delta-\gamma),$$
$$\sin(\gamma-\beta)\sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha-\delta) = \sin(\alpha-\delta+\gamma-\beta)\sin(\beta-\delta),$$
$$\sin(\delta-\gamma)\sin(\gamma-\beta) + \sin(\delta-\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \sin(\beta-\alpha+\delta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha),$$
$$\sin(\delta-\gamma)\sin(\gamma-2\beta+\alpha) + \sin(\delta-\beta)\sin(\beta-\alpha) = \sin(\beta-\alpha+\delta-\gamma)\sin(\gamma-\beta).$$

Setzen wir daher zur Abkürzung:

$$\sin(\alpha-\beta) = A,\ \sin(\beta-\gamma) = B,\ \sin(\gamma-\delta) = C,\ \sin(\delta-\alpha) = D,$$
$$\sin(\alpha-\gamma) = F,\ \sin(\beta-\delta) = G,\ \sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta) = M,$$

so wird:

$$\begin{aligned} T &= -MD - aCG - dAF, \\ U &= MG - bCD - dAB, \\ T' &= MF - aBC - cAD, \\ U' &= MB + bCF + cAG. \end{aligned}$$

Aus (5) und (6) folgt nun nach Elimination des Verhältnisses $t:u$

$$(7) \quad T'U - TU' = 0.$$

Vermöge der eben aufgestellten Werthe von $T,..U'$ aber ergiebt sich

$$\begin{aligned} T'U - TU' = &(M^2 + ab \,.\, C^2 + cd \,.\, A^2)(FG + BD) \\ &+ (ac \,.\, G^2 + ad \,.\, B^2 + bc \,.\, D^2 + bd \,.\, F^2)AC; \end{aligned}$$

und da, wie man mit Hülfe der Formel (*) leicht findet,

$$FG + BD = CA$$

ist, so reducirt sich die Gleichung (7) auf:

$$0 = M^2 + cd.A^2 + ad.B^2 + ab.C^2 + bc.D^2 + bd.F^2 + ac.G^2.$$

Dividirt man noch mit $abcd$ und setzt für M, A, B,... die damit bezeichneten Sinus, so erhält man folgende durch ihre Form in der That merkwürdige Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2}{abcd} + \frac{\sin(\alpha-\beta)^2}{ab} + \frac{\sin(\beta-\gamma)^2}{bc} + \frac{\sin(\gamma-\delta)^2}{cd} \\ &+ \frac{\sin(\delta-\alpha)^2}{da} + \frac{\sin(\alpha-\gamma)^2}{ac} + \frac{\sin(\beta-\delta)^2}{bd}, \end{aligned}$$

als die Bedingung, unter welcher das Viereck um ein unendlich Weniges beweglich wird.

§. 267.

Zusätze. *a.* Ist das Viereck ein Parallelogramm, so hat man $\gamma = 180° + \alpha$, $\delta = 180° + \beta$, und die Gleichung wird

$$0 = \frac{\sin 2(\alpha-\beta)^2}{abcd} + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da}\right)\sin(\alpha-\beta)^2,$$

d. i. $0 = 4\cos(\alpha-\beta)^2 + (a+c)(b+d)$.

Ist das Parallelogramm ein Rechteck, so ist noch $\alpha - \beta = 90°$, also

$$0 = (a-c)(b+d)$$

die Bedingung der Beweglichkeit, und es muss folglich entweder $a - c = 0$, oder $b + d = 0$ seyn.

b. Weil $a = \frac{FB - AF}{AB} = \frac{AB - 2AF}{AB}$ und $c = \frac{2HD - CD}{CD}$ so ist $a - c = \frac{2HD}{CD} - \frac{2AF}{AB}$. Nimmt man nun die Linien AB und CD nach den eben so ausgedrückten Richtungen mit einerlei Zeichen, so sind beim Rechtecke (so wie beim Parallelogramme) AB und CD einander gleich, auch dem Zeichen nach. Die Gleichung für die Beweglichkeit: $a - c = 0$, wird hiernach identisch mit: $HD = AF$, und zeigt dadurch an, dass die Gerade FH mit den Seiten BC und DA parallel seyn muss (Fig. 72ᵉ). Dass unter dieser Bedingung das Rechteck sich um ein unendlich Weniges verrücken lässt, ist leicht einzusehen. Dreht man nämlich die Seite AB um einen unendlich kleinen Winkel um den Punkt F, so verschieben sich BC und DA an G und I, ohne sich zu drehen, rücken also in sich selbst fort, und die Seite CD dreht sich um H um denselben Winkel und nach derselben Richtung, wie AB.

Eben so wird durch die Gleichung $b + d = 0$ der Parallelismus von GI mit AB und CD ausgedrückt. In diesem Falle besteht die Verrückung des Vierecks darin, dass sich BC und DA um G und I drehen, während sich AB und CD an F und G verschieben.

c. Sind F, G, H, I die Mittelpunkte der Seiten AB, BC,..., so sind a, b, c, $d = 0$. In diesem Falle reducirt sich die allgemeine Gleichung auf

$$\sin(\alpha - \beta + \gamma - \delta) = 0,$$

und giebt damit zu erkennen, dass die Summe zweier gegenüberliegender Winkel des Vierecks 2 oder 4 rechten Winkeln gleich seyn muss, dass also um das Viereck ein Kreis beschrieben werden können muss. Und in der That, ist $ABCD$ ein in einem Kreise beschriebenes Viereck, und nimmt man in dem Kreise nach einerlei Seite zu die Bögen AA', BB', CC', DD' einander gleich und unendlich klein, so sind die Geraden AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, etc. paarweise einander gleich und halbiren sich gegenseitig.

Sechstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an Ketten und an vollkommen biegsamen Fäden.

§. 268.

Die einfachste Art, auf welche mehrere Körper mit einander verbunden seyn können, besteht darin, dass von ihnen, in einer gewissen Ordnung genommen, jeder mit dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden, keiner also mit mehr als zweien der übrigen, verbunden ist. Ein solches System, bei welchem übrigens noch vorauszusetzen ist, dass je zwei mit einander verbundene Körper noch gegenseitige Beweglichkeit haben, indem sie sonst als ein einziger Körper zu betrachten wären, nennt man eine Kette, die einzelnen Körper selbst: die Glieder der Kette. Ist der

dieses im Allgemeinen unbewegliche System (§. 248.) eine unendlich kleine Beweglichkeit erlangt.

Auflösung. Die gesuchte Bedingung ist offenbar einerlei mit derjenigen, unter welcher die Seiten des Dreiecks ABC sich um die Punkte F, G, H drehen, und die Ecken desselben in Curven fortgehen, deren Tangenten l, m, n sind. Letztere Bedingung aber, und folglich auch die erstere, besteht nach §. 232. C. in der Erfüllung der Gleichung:

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AH}{HB}=\frac{MA}{AN}\cdot\frac{NB}{BL}\cdot\frac{LC}{CM}.$$

§. 261.

Aufgabe. Man hat ein in einer Ebene bewegliches Viereck $ABCD$ (Fig. 69.) mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln. Zwei Punkte F und H in zwei einander gegenüberliegenden Seiten AB und CD sind unbeweglich, und damit das Viereck selbst im Allgemeinen unbeweglich (§. 247. Zus.). Die Lage der Punkte F und H so zu bestimmen, dass dem Viereck noch eine unendlich kleine Beweglichkeit übrig bleibt.

Auflösung. Man lasse auf beliebige Punkte der AB Kräfte wirken, deren Moment in Bezug auf F, $=p_1$ sey; desgleichen bringe man irgendwo an CD Kräfte an, deren Moment in Bezug auf H, r_1 heisse. Die Pressungen, welche deshalb die Seite DA in D und A auf die Seiten CD und AB ausübt, und welche in der Richtung von DA einander gleich und entgegengesetzt sind, nenne man t und $-t$; die Pressungen von BC auf die Enden B und C von AB und CD seyen eben so $=v$ und $-v$. Alsdann hat man für's Gleichgewicht

sungen, u. s. w. Sämmtliche Pressungen $T, T', T'', \ldots$ sind daher einander gleich, und ihre Richtungen fallen nebst den Berührungspunkten $A, A', A'', \ldots$ in eine und dieselbe Gerade. Ist nun etwa m, der erste und m'' der letzte Körper der Reihe, so muss an m, die Pressung T mit der Kraft P, und an m'' die Pressung $-T''$ mit der Kraft Q im Gleichgewichte seyn. Dies führt zu folgenden zwei Bedingungen für das Gleichgewicht des ganzen Systems:

1) Die Berührungspunkte der Körper müssen in einer Geraden liegen.

2) Die zwei Kräfte P und Q müssen in dieser Geraden nach entgegengesetzten Richtungen wirken und einander gleich seyn.

§. 270.

Das Gleichgewicht jedes einzelnen Gliedes der eben betrachteten Kette, und mithin das Gleichgewicht der ganzen Kette selbst, ist sicher, oder unsicher, jenachdem die zwei Kräfte am Anfang und Ende derselben die Glieder von einander zu entfernen streben, oder sie gegen einander drücken. Im letztern Falle wächst die Unsicherheit des Gleichgewichts mit der Anzahl der Glieder, so dass bei physischen Körpern, obschon sich diese nicht in mathematischen Punkten, sondern in kleinen Flächen berühren, auch gegenseitigen Reibungen unterworfen sind, ein solches Gleichgewicht nur dann noch erhalten werden kann, wenn die Anzahl derselben sehr gering ist. Bei einer Reihe unendlich vieler und unendlich kleiner Körper, d. i. bei einem vollkommen biegsamen Faden, kann daher von einem unsichern Gleichgewichte nicht mehr die Rede seyn.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines

vollkommen biegsamen und frei beweglichen Fadens, auf dessen Enden zwei Kräfte wirken, sind demnach

1) *dass der Faden eine gerade Linie bildet, und*

2) *dass die Kräfte einander gleich sind und, nach entgegengesetzten in die Fadenlinie fallenden Richtungen wirkend, die Enden der Linie von einander zu entfernen streben.*

Die Pressungen oder die Kräfte, mit denen bei diesem Gleichgewichte je zwei nächstfolgende Elemente des Fadens auf einander wirken, sind zufolge des vor. §. den Kräften an den Enden des Fadens gleich und so gerichtet, dass die Elemente nicht gegen einander drücken, sondern in der Richtung der Fadenlinie sich von einander zu trennen suchen; es sind daher keine eigentlichen Pressungen, sondern Spannungen (§. 200.) — so wie auch bei jedem andern Systeme von Kräften, welche an einem Faden im Gleichgewichte sind, die Elemente des Fadens, wegen der Unmöglichkeit eines unsichern Gleichgewichts, nur spannend auf einander wirken können.

Beim Gleichgewichte zwischen zwei Kräften, welche an den Enden eines freien und vollkommen biegsamen Fadens angebracht sind, herrscht also in jedem Punkte des Fadens eine Spannung, deren Richtung in die Fadenlinie fällt, und deren Intensität der gemeinschaftlichen Intensität der beiden Kräfte gleich ist.

§. 271.

Wir wollen jetzt die in §. 269. untersuchte Kette nicht mehr vollkommen frei beweglich, sondern der Bedingung unterworfen seyn lassen, dass ihre Glieder eine

unbewegliche Fläche berühren. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen seyen noch B, B',.. (Fig. 74.) die Berührungspunkte der Glieder m, m',... mit der Fläche, und R, R',... die daselbst von letzterer auf erstere ausgeübten Pressungen. Halten sich nun zwei auf das erste und letzte Glied wirkende Kräfte das Gleichgewicht, so müssen an jedem Mittelgliede besonders die Spannungen, welche es von dem vorhergehenden und folgenden Gliede erleidet, und die von der Fläche auf dasselbe erzeugte Pressung im Gleichgewichte mit einander seyn. Die drei auf der Oberfläche von m in A, A' und B zu errichtenden Normalen, als die Richtungen der auf m wirkenden Kräfte T, T' und R, müssen sich folglich in einem Punkte C schneiden und in einer Ebene liegen, und es muss sich verhalten

$$T : T' : R = \sin BCA' : \sin ACB : \sin ACA'.$$

Auf gleiche Art treffen wegen des Gleichgewichts von m' die drei in A', A'' und B' auf m' zu errichtenden Normalen in einem Punkte C' zusammen und liegen in einer Ebene, und man hat

$$T' : T'' : R' = \sin B'C'A'' : \sin A'C'B' : \sin A'C'A'',$$

folglich in Verbindung mit dem Verhältnisse zwischen T und T':

$$\frac{T}{T''} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'}$$

und ähnlicher Weise:

$$\frac{T}{T'''} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'} \cdot \frac{\sin B''C''A'''}{\sin A''C''B''};$$

und eben so ergiebt sich das Verhältniss auch zwischen irgend zwei andern Spannungen, folglich auch das Verhältniss zwischen P und Q, indem die Spannung des ersten Gliedes der Kette durch ein vorhergehendes

Glied die Kraft P, und die Spannung des letzten Gliedes durch ein folgendes die Kraft Q vertritt. Ist folglich m das erste Glied und $m^{(n)}$ das letzte, CA die Richtung von P und $C^{(n)}A^{(n+1)}$ die Richtung von Q, so hat man:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'} \cdots \frac{\sin B^{(n)}C^{(n)}A^{(n+1)}}{\sin A^{(n)}C^{(n)}B^{(n)}}.$$

Die Bedingungen des Gleichgewichts bestehen daher gegenwärtig darin:

1) dass die Normalen in der Berührung des ersten (letzten) Gliedes mit der unbeweglichen Fläche und mit dem zweiten (vorletzten) Gliede und die Richtung der Kraft P (Q) in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden;

2) dass eben so die Normalen in der Berührung jedes Mittelgliedes mit dem vorhergehenden und folgenden Gliede und mit der Fläche in einer Ebene liegen und in einem Punkte zusammentreffen, und

3) dass zwischen den Intensitäten von P und Q das eben gefundene Verhältniss zwischen den Sinussen der von den Normalen und den Richtungen von P und Q gebildeten Winkel statt findet.

§. 272.

Um jetzt von der eben betrachteten Kette *zu einem über eine unbewegliche Fläche gelegten und an seinen Enden durch Kräfte gespannten Faden* überzugehen, wird es am einfachsten seyn, uns die Glieder der Kette als unendlich kleine einander gleiche Kugeln zu denken. Denn sind die Glieder kugelförmig, so braucht die Bedingung, dass bei jedem Gliede die Normalen in den drei Berührungen mit der Fläche und den

zwei angrenzenden Gliedern sich in einem Punkte schneiden, nicht ausdrücklich erwähnt zu werden, da sämmtliche Normalen auf der Oberfläche einer Kugel in ihrem Mittelpunkte zusammentreffen. Rücksichtlich der gegenseitigen Lage der Kugeln bleibt daher bloss die Bedingung übrig, dass bei jeder die gedachten drei Normalen in einer Ebene liegen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die Mittelpunkte C, C', C'' von je drei auf einander folgenden Kugeln m, m', m'' mit dem Punkte B', in welchem die mittlere Kugel m' die Fläche berührt, in einer Ebene enthalten sind.

Indem wir nun die Kugeln unendlich klein und einander gleich annehmen, lassen sich CC', $C'C''$, ... als Elemente einer von der Fläche überall um den Halbmesser der Kugeln abstehenden Curve, d. i. eines über die Fläche gelegten Fadens, ansehen, und die letztere Bedingung drückt dann aus, dass je zwei nächstfolgende Elemente des Fadens, und die Normale der Fläche an derselben Stelle in einer Ebene liegen, d. h. dass in jedem Punkte der von dem Faden gebildeten Curve die Krümmungsebene derselben auf der Fläche rechtwinklig steht. Bekanntlich ist dieses die charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linie, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei gegebenen Punkten derselben sich ziehen lässt *). *Mithin muss der*

*) Dies gilt wenigstens im Allgemeinen. In jedem Falle aber wird man eine Curve, die jene charakteristische Eigenschaft besitzt, in Theile zerlegen können, deren jeder ein Minimum zwischen seinen Endpunkten ist, sollte auch nicht die ganze Curve die möglich kleinste zwischen ihren Endpunkten seyn. Zerlegt man z. B. den Bogen eines grössten Kreises auf einer Kugel, der grösser als ein Halbkreis ist, in Theile, deren jeder kleiner als ein Halbkreis ist, so ist jeder dieser Theile die kürzeste Linie auf der Kugel zwischen ihren Endpunkten. Dagegen ist der ganze Bogen unter allen

Faden zwischen seinen beiden Endpunkten so liegen, dass er die kürzeste Linie ist, die auf der Fläche von dem einen Endpunkte desselben zum andern gezogen werden kann, oder doch so, dass genugsam kleine Theile desselben die kürzesten Linien zwischen ihren

---

einfach gekrümmten Linien, die sich auf der Kugel zwischen seinen Enden ziehen lassen, die längste, und die Ergänzung dieses Bogens zu einem ganzen Kreise die kürzeste auf der Kugel.

Dass bei der kürzesten Curve, die sich auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei Punkten der letztern ziehen lässt, die Krümmungsebene der Curve überall rechtwinklig auf der Fläche steht, lässt sich folgendergestalt geometrisch darthun. Seyen *AB*, *BC* (Fig. 75.) zwei nächstfolgende Elemente der Curve, und *MO*, *MP* die Elemente der Fläche, in denen erstere Elemente enthalten sind. Die Elemente der Curve wollen wir uns geradlinig und die der Fläche eben denken, und *MN* sey die Gerade, in welcher sich die letztern schneiden. Da nun die ganze Curve die kürzeste Linie seyn soll, welche zwischen ihren Endpunkten auf der Fläche gezogen werden kann, so muss auch der Theil *ABC* derselben die kürzeste Linie unter allen seyn, welche von *A* geradlinig nach einem Punkte der *MN* und von da geradlinig nach *C* sich ziehen lassen. Da ferner die Länge dieser gebrochenen Linie sich nicht ändert, wenn das eine der beiden Flächenelemente *MO* und *MP*, oder beide zugleich, mit den Linienelementen *AB* und *BC*, welche sie enthalten, um *MN* als Axe gedreht werden, so wird diejenige Linie *ABC* die kürzeste seyn, welche nach einer Drehung, wodurch *MP* in die erweiterte Ebene von *MO* fällt, zu einer ungebrochenen Geraden, als der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten in einer Ebene, wird. Kommt daher *C* nach dieser Drehung nach *C'*, so muss *B* in die Gerade *AC'* fallen. Nun beschreibt bei dieser Drehung die Gerade *BC* die Fläche eines geraden Kegels, von welchem *MN* die Axe ist. Ein Element dieser Kegelfläche ist der Winkel *CBC'*; die durch die Axe gehenden Ebenen *MBC* und *MBC'* müssen folglich mit der Ebene des Winkels *CBC'* unendlich nahe rechte Winkel machen, d. h., weil *BC'* die geradlinige Verlängerung von *AB* ist: die Berührungsebenen *MO* und *MP* der Fläche müssen auf der Krümmungsebene *ABC* der Curve rechtwinklig seyn.

Endpunkten sind. Dies ist die erste Bedingung des Gleichgewichts.

Sodann sind wegen der Gleichheit und unendlichen Kleinheit der Kugeln die Winkel ACB, BCA', $A'C'B'$, etc. unendlich wenig von rechten Winkeln, mithin ihre Sinus um unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung von der Einheit verschieden. Zufolge der Proportion: $T : T' = \sin BCA' : \sin ACB$, ist daher der Unterschied je zweier nächstfolgenden Spannungen nur ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, also erst der Unterschied zweier Spannungen, zwischen welche eine unendliche Menge anderer fallen, d. i. der Spannungen an zwei um einen endlichen Theil des Fadens von einander entfernten Stellen, von der ersten Ordnung, d. h. *die Spannung des Fadens ist überall von gleicher Grösse; ihre Richtung aber ist die der Tangente der Fadencurve.*

Da nun am ersten (letzten) Elemente die Kraft P (Q) mit der vom zweiten (vorletzten) Elemente auf dasselbe hervorgebrachten Spannung das Gleichgewicht halten muss, und dieses Element, gleich den übrigen, an der unbeweglichen Fläche beweglich ist, so ergiebt sich als zweite Bedingung für das Gleichgewicht des Fadens, *dass jede der beiden Kräfte, welche auf den Anfang und das Ende des Fadens wirken, mit der Normale der Fläche und der Tangente des Fadens daselbst in einer Ebene liegt, und dass, wenn man die Kräfte nach diesen Richtungen zerlegt, die tangentialen Kräfte einander* (*und der Spannung des Fadens*) *gleich sind und den Faden nach entgegengesetzten Seiten zu ziehen suchen.*

Axe die Winkel $90° + \alpha$, $90° + \beta$, ... machen. Man bezeichne diese Pressungen resp. mit $2t$, $2u$, $2v$, $2w$, so dass die Pressung $2t$ positiv zu nehmen ist, wenn ihre Richtung in der That durch $90° + \alpha$ bestimmt wird, negativ, wenn sie die entgegengesetzte ist, u. s. w.

Das Gleichgewicht dauert nun fort, wenn wir die unbeweglichen Punkte F, G, .. weglassen und dafür den Pressungen $2t$, $2u$, ... gleiche Kräfte nach den Richtungen $90° + \alpha$, $90° + \beta$, ... an denselben Stellen F, G, ... der Seiten anbringen; es dauert noch fort, wenn wir jede dieser Kräfte in zwei mit ihr parallele zerlegen, welche auf die Endpunkte der jedesmaligen Seite wirken. Wir zerlegen daher $2t$ in die zwei damit parallelen Kräfte an A und B:

$$\frac{FB}{AB} \cdot 2t = (1 + a)\, t \text{ und } \frac{AF}{AB} \cdot 2t = (1 - a)\, t,$$

wenn $\frac{FB}{AB} = \frac{1}{2}(1 + a)$, folglich $\frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}(1 - a)$ gesetzt wird, und wo daher

$$\frac{FB - AF}{AB} = a$$

ist. Setzen wir eben so

$$\frac{GC - BG}{BC} = b, \quad \frac{HD - CH}{CD} = c, \quad \frac{IA - DI}{DA} =$$

so ist die Kraft $2u$ gleichwirkend mit den zwe parallelen Kräften $(1 + b)\, u$ und $(1 - b)\, u$ an I C, u. s. w.

Hiernach haben wir es jetzt mit einem Vi zu thun, dessen Ecken allein der Wirkung vor ten ausgesetzt sind; nämlich auf A wirken die p, $(1 - d)\, w$, $(1 + a)\, t$; auf B die Kräfte q, ($(1 + b)\, u$; u. s. w., und es sind nunmehr die (

$$\sin(\alpha - \beta + \gamma - \delta) = 0,$$

und giebt damit zu erkennen, dass die Summe zweier gegenüberliegender Winkel des Vierecks 2 oder 4 rechten Winkeln gleich seyn muss, dass also um das Viereck ein Kreis beschrieben werden können muss. Und in der That, ist $ABCD$ ein in einem Kreise beschriebenes Viereck, und nimmt man in dem Kreise nach einerlei Seite zu die Bögen AA', BB', CC', DD' einander gleich und unendlich klein, so sind die Geraden AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, etc. paarweise einander gleich und halbiren sich gegenseitig.

Sechstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an Ketten und an vollkommen biegsamen Fäden.

§. 268.

Die einfachste Art, auf welche mehrere Körper mit einander verbunden seyn können, besteht darin, dass von ihnen, in einer gewissen Ordnung genommen, jeder mit dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden, keiner also mit mehr als zweien der übrigen, verbunden ist. Ein solches System, bei welchem übrigens noch vorauszusetzen ist, dass je zwei mit einander verbundene Körper noch gegenseitige Beweglichkeit haben, indem sie sonst als ein einziger Körper zu betrachten wären, nennt man eine Kette, die einzelnen Körper selbst: die Glieder der Kette. Ist der

letzte Körper noch mit dem ersten verbunden, so heisst die Kette **geschlossen**.

In dem Vorhergehenden sind dergleichen Systeme schon oft in Betracht gezogen worden. Denn jedes Vieleck, als ein System in gewisser Folge paarweise mit einander verbundener gerader Linien, ist eine solche Kette. Von diesen Betrachtungen werden sich die nun folgenden hauptsächlich dadurch unterscheiden, dass wir jetzt die Glieder einer Kette nach allen Dimensionen unendlich klein und in unendlicher Zahl annehmen, und somit die Kette in einen unendlich dünnen und vollkommen biegsamen **Faden** übergehen lassen.

§. 269.

Aufgabe. Man hat eine Reihe frei beweglicher Körper, von denen jeder mit dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden in einem Punkte verbunden ist. Die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, wenn auf den ersten Körper der Reihe eine Kraft P und auf den letzten eine Kraft Q wirkt.

Auflösung. Seyen $m_,$, m, m', m'',... (Fig. 73.) unmittelbar auf einander folgende Körper der Reihe; A, A', A'',... die Berührungspunkte von $m_,$ mit m, von m mit m', etc. Man setze in A an $m_,$ und m die Pressungen oder Gegenkräfte T und $-T$, in A' an m und m' die Gegenkräfte T' und $-T'$, in A'' an m' und m'' die Gegenkräfte T'' und $-T''$, u. s. w. Da nun auf m ausser den Pressungen $-T$ und T' keine weitere Kraft wirkt, so müssen sich $-T$ und T' allein das Gleichgewicht halten und daher einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Dasselbe gilt auch von den Pressungen $-T'$ und T'', welche m' erleidet, desgleichen von den auf m'' wirkenden Pres-

so wird:

$$T = -MD - aCG - dAF,$$
$$U = MG - bCD - dAB,$$
$$T' = MF - aBC - cAD,$$
$$U' = MB + bCF + cAG.$$

Aus (5) und (6) folgt nun nach Elimination des Verhältnisses $t : u$

$$(7) \quad T'U - TU' = 0.$$

Vermöge der eben aufgestellten Werthe von $T, .. U'$ aber ergiebt sich

$$T'U - TU' = (M^2 + ab \,.\, C^2 + cd \,.\, A^2)(FG + BD) + (ac \,.\, G^2 + ad \,.\, B^2 + bc \,.\, D^2 + bd \,.\, F^2)AC;$$

und da, wie man mit Hülfe der Formel (*) leicht findet,

$$FG + BD = CA$$

ist, so reducirt sich die Gleichung (7) auf:

$$0 = M^2 + cd.A^2 + ad.B^2 + ab.C^2 + bc.D^2 + bd.F^2 + ac.G^2.$$

Dividirt man noch mit $abcd$ und setzt für $M, A, B, \ldots$ die damit bezeichneten Sinus, so erhält man folgende durch ihre Form in der That merkwürdige Gleichung:

$$0 = \frac{\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2}{abcd} + \frac{\sin(\alpha-\beta)^2}{ab} + \frac{\sin(\beta-\gamma)^2}{bc} + \frac{\sin(\gamma-\delta)^2}{cd} + \frac{\sin(\delta-\alpha)^2}{da} + \frac{\sin(\alpha-\gamma)^2}{ac} + \frac{\sin(\beta-\delta)^2}{bd},$$

als die Bedingung, unter welcher das Viereck um ein unendlich Weniges beweglich wird.

§. 267.

Zusätze. *a.* Ist das Viereck ein Parallelogramm, so hat man $\gamma = 180^\circ + \alpha$, $\delta = 180^\circ + \beta$, und die Gleichung wird

$$0 = \frac{\sin 2(\alpha-\beta)^2}{abcd} + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da}\right)\sin(\alpha-\beta)^2,$$

vollkommen biegsamen und frei beweglichen Fadens, auf dessen Enden zwei Kräfte wirken, sind demnach

1) *dass der Faden eine gerade Linie bildet, und*

2) *dass die Kräfte einander gleich sind und, nach entgegengesetzten in die Fadenlinie fallenden Richtungen wirkend, die Enden der Linie von einander zu entfernen streben.*

Die Pressungen oder die Kräfte, mit denen bei diesem Gleichgewichte je zwei nächstfolgende Elemente des Fadens auf einander wirken, sind zufolge des vor. §. den Kräften an den Enden des Fadens gleich und so gerichtet, dass die Elemente nicht gegen einander drücken, sondern in der Richtung der Fadenlinie sich von einander zu trennen suchen; es sind daher keine eigentlichen Pressungen, sondern Spannungen (§. 200.) — so wie auch bei jedem andern Systeme von Kräften, welche an einem Faden im Gleichgewichte sind, die Elemente des Fadens, wegen der Unmöglichkeit eines unsichern Gleichgewichts, nur spannend auf einander wirken können.

Beim Gleichgewichte zwischen zwei Kräften, welche an den Enden eines freien und vollkommen biegsamen Fadens angebracht sind, herrscht also in jedem Punkte des Fadens eine Spannung, deren Richtung in die Fadenlinie fällt, und deren Intensität der gemeinschaftlichen Intensität der beiden Kräfte gleich ist.

§. 271.

Wir wollen jetzt die in §. 269. untersuchte Kette nicht mehr vollkommen frei beweglich, sondern der Bedingung unterworfen seyn lassen, dass ihre Glieder eine

unbewegliche Fläche berühren. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen seyen noch B, B',.. (Fig. 74.) die Berührungspunkte der Glieder m, m',... mit der Fläche, und R, R',... die daselbst von letzterer auf erstere ausgeübten Pressungen. Halten sich nun zwei auf das erste und letzte Glied wirkende Kräfte das Gleichgewicht, so müssen an jedem Mittelgliede besonders die Spannungen, welche es von dem vorhergehenden und folgenden Gliede erleidet, und die von der Fläche auf dasselbe erzeugte Pressung im Gleichgewichte mit einander seyn. Die drei auf der Oberfläche von m in A, A' und B zu errichtenden Normalen, als die Richtungen der auf m wirkenden Kräfte T, T' und R, müssen sich folglich in einem Punkte C schneiden und in einer Ebene liegen, und es muss sich verhalten

$$T : T' : R = \sin BCA' : \sin ACB : \sin ACA'.$$

Auf gleiche Art treffen wegen des Gleichgewichts von m' die drei in A', A'' und B' auf m' zu errichtenden Normalen in einem Punkte C' zusammen und liegen in einer Ebene, und man hat

$$T' : T'' : R' = \sin B'C'A'' : \sin A'C'B' : \sin A'C'A'',$$

folglich in Verbindung mit dem Verhältnisse zwischen T und T':

$$\frac{T}{T''} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'}$$

und ähnlicher Weise:

$$\frac{T}{T'''} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'} \cdot \frac{\sin B''C''A'''}{\sin A''C''B''};$$

und eben so ergiebt sich das Verhältniss auch zwischen irgend zwei andern Spannungen, folglich auch das Verhältniss zwischen P und Q, indem die Spannung des ersten Gliedes der Kette durch ein vorhergehendes

Glied die Kraft P, und die Spannung des letzten Gliedes durch ein folgendes die Kraft Q vertritt. Ist folglich m das erste Glied und $m^{(n)}$ das letzte, CA die Richtung von P und $C^{(n)}A^{(n+1)}$ die Richtung von Q, so hat man:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin BCA}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin BCA'}{\sin A'CB} \cdots \frac{\sin B^{(n)}C^{(n)}A^{(n+1)}}{\sin A^{(n)}C^{(n)}B^{(n)}}.$$

Die Bedingungen des Gleichgewichts bestehen daher gegenwärtig darin:

1 dass die Normalen in der Berührung des ersten letzten Gliedes mit der unbeweglichen Fläche und mit dem zweiten vorletzten Gliede und die Richtung der Kraft P (Q) in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden;

2 dass eben so die Normalen in der Berührung jedes Mittelgliedes mit dem vorhergehenden und folgenden Gliede und mit der Fläche in einer Ebene liegen und in einem Punkte zusammentreffen, und

3 dass zwischen den Intensitäten von P und Q das oben gefundene Verhältniss zwischen den Sinussen der von den Normalen und den Richtungen von P und Q gebildeten Winkel statt findet.

§. 272.

Um jetzt von der eben betrachteten Kette *zu einem über eine unbewegliche Fläche gelegten und an seinen Enden durch Kräfte gespannten Faden* übergehen, wird es am einfachsten seyn, uns die Glieder der Kette als unendlich kleine einander gleiche Kugeln zu denken. Denn sind die Glieder kugelförmig, so besteht die Bedingung, dass bei jedem Gliede die Normalen in den drei Berührungen mit der Fläche und den

zwei angrenzenden Gliedern sich in einem Punkte schneiden, nicht ausdrücklich erwähnt zu werden, da sämmtliche Normalen auf der Oberfläche einer Kugel in ihrem Mittelpunkte zusammentreffen. Rücksichtlich der gegenseitigen Lage der Kugeln bleibt daher bloss die Bedingung übrig, dass bei jeder die gedachten drei Normalen in einer Ebene liegen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die Mittelpunkte C, C', C'' von je drei auf einander folgenden Kugeln m, m', m'' mit dem Punkte B', in welchem die mittlere Kugel m' die Fläche berührt, in einer Ebene enthalten sind.

Indem wir nun die Kugeln unendlich klein und einander gleich annehmen, lassen sich CC', $C'C''$, ... als Elemente einer von der Fläche überall um den Halbmesser der Kugeln abstehenden Curve, d. i. eines über die Fläche gelegten Fadens, ansehen, und die letztere Bedingung drückt dann aus, dass je zwei nächstfolgende Elemente des Fadens, und die Normale der Fläche an derselben Stelle in einer Ebene liegen, d. h. dass in jedem Punkte der von dem Faden gebildeten Curve die Krümmungsebene derselben auf der Fläche rechtwinklig steht. Bekanntlich ist dieses die charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linie, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei gegebenen Punkten derselben sich ziehen lässt *). *Mithin muss der*

*) Dies gilt wenigstens im Allgemeinen. In jedem Falle aber wird man eine Curve, die jene charakteristische Eigenschaft besitzt, in Theile zerlegen können, deren jeder ein Minimum zwischen seinen Endpunkten ist, sollte auch nicht die ganze Curve die möglich kleinste zwischen ihren Endpunkten seyn. Zerlegt man z. B. den Bogen eines grössten Kreises auf einer Kugel, der grösser als ein Halbkreis ist, in Theile, deren jeder kleiner als ein Halbkreis ist, so ist jeder dieser Theile die kürzeste Linie auf der Kugel zwischen ihren Endpunkten. Dagegen ist der ganze Bogen unter allen

Glied die Kraft P, und die Spannung des letzten Gliedes durch ein folgendes die Kraft Q vertritt. Ist folglich m das erste Glied und $m^{(n)}$ das letzte, CA die Richtung von P und $C^{(n)}A^{(n+1)}$ die Richtung von Q, so hat man:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'} \cdots \frac{\sin B^{(n)}C^{(n)}A^{(n+1)}}{\sin A^{(n)}C^{(n)}B^{(n)}}.$$

Die Bedingungen des Gleichgewichts bestehen daher gegenwärtig darin:

1) dass die Normalen in der Berührung des ersten (letzten) Gliedes mit der unbeweglichen Fläche und mit dem zweiten (vorletzten) Gliede und die Richtung der Kraft P (Q) in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden;

2) dass eben so die Normalen in der Berührung jedes Mittelgliedes mit dem vorhergehenden und folgenden Gliede und mit der Fläche in einer Ebene liegen und in einem Punkte zusammentreffen, und

3) dass zwischen den Intensitäten von P und Q das eben gefundene Verhältniss zwischen den Sinussen der von den Normalen und den Richtungen von P und Q gebildeten Winkel statt findet.

§. 272.

Um jetzt von der eben betrachteten Kette *zu einem über eine unbewegliche Fläche gelegten und an seinen Enden durch Kräfte gespannten Faden* überzugehen, wird es am einfachsten seyn, uns die Glieder der Kette als unendlich kleine einander gleiche Kugeln zu denken. Denn sind die Glieder kugelförmig, so braucht die Bedingung, dass bei jedem Gliede die Normalen in den drei Berührungen mit der Fläche und den

zwei angrenzenden Gliedern sich in einem Punkte schneiden, nicht ausdrücklich erwähnt zu werden, da sämmtliche Normalen auf der Oberfläche einer Kugel in ihrem Mittelpunkte zusammentreffen. Rücksichtlich der gegenseitigen Lage der Kugeln bleibt daher bloss die Bedingung übrig, dass bei jeder die gedachten drei Normalen in einer Ebene liegen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die Mittelpunkte C, C', C'' von je drei auf einander folgenden Kugeln m, m', m'' mit dem Punkte B', in welchem die mittlere Kugel m' die Fläche berührt, in einer Ebene enthalten sind.

Indem wir nun die Kugeln unendlich klein und einander gleich annehmen, lassen sich CC', $C'C''$, ... als Elemente einer von der Fläche überall um den Halbmesser der Kugeln abstehenden Curve, d. i. eines über die Fläche gelegten Fadens, ansehen, und die letztere Bedingung drückt dann aus, dass je zwei nächstfolgende Elemente des Fadens, und die Normale der Fläche an derselben Stelle in einer Ebene liegen, d. h. dass in jedem Punkte der von dem Faden gebildeten Curve die Krümmungsebene derselben auf der Fläche rechtwinklig steht. Bekanntlich ist dieses die charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linie, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei gegebenen Punkten derselben sich ziehen lässt *). *Mithin muss der*

*) Dies gilt wenigstens im Allgemeinen. In jedem Falle aber wird man eine Curve, die jene charakteristische Eigenschaft besitzt, in Theile zerlegen können, deren jeder ein Minimum zwischen seinen Endpunkten ist, sollte auch nicht die ganze Curve die möglich kleinste zwischen ihren Endpunkten seyn. Zerlegt man z. B. den Bogen eines grössten Kreises auf einer Kugel, der grösser als ein Halbkreis ist, in Theile, deren jeder kleiner als ein Halbkreis ist, so ist jeder dieser Theile die kürzeste Linie auf der Kugel zwischen ihren Endpunkten. Dagegen ist der ganze Bogen unter allen

Faden zwischen seinen beiden Endpunkten so liegen, dass er die kürzeste Linie ist, die auf der Fläche von dem einen Endpunkte desselben zum andern gezogen werden kann, oder doch so, dass genugsam kleine Theile desselben die kürzesten Linien zwischen ihren

---

einfach gekrümmten Linien, die sich auf der Kugel zwischen seinen Enden ziehen lassen, die längste, und die Ergänzung dieses Bogens zu einem ganzen Kreise die kürzeste auf der Kugel.

Dass bei der kürzesten Curve, die sich auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei Punkten der letztern ziehen lässt, die Krümmungsebene der Curve überall rechtwinklig auf der Fläche steht, lässt sich folgendergestalt geometrisch darthun. Seyen *AB*, *BC* (Fig. 75.) zwei nächstfolgende Elemente der Curve, und *MO*, *MP* die Elemente der Fläche, in denen erstere Elemente enthalten sind. Die Elemente der Curve wollen wir uns geradlinig und die der Fläche eben denken, und *MN* sey die Gerade, in welcher sich die letztern schneiden. Da nun die ganze Curve die kürzeste Linie seyn soll, welche zwischen ihren Endpunkten auf der Fläche gezogen werden kann, so muss auch der Theil *ABC* derselben die kürzeste Linie unter allen seyn, welche von *A* geradlinig nach einem Punkte der *MN* und von da geradlinig nach *C* sich ziehen lassen. Da ferner die Länge dieser gebrochenen Linie sich nicht ändert, wenn das eine der beiden Flächenelemente *MO* und *MP*, oder beide zugleich, mit den Linienelementen *AB* und *BC*, welche sie enthalten, um *MN* als Axe gedreht werden, so wird diejenige Linie *ABC* die kürzeste seyn, welche nach einer Drehung, wodurch *MP* in die erweiterte Ebene von *MO* fällt, zu einer ungebrochenen Geraden, als der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten in einer Ebene, wird. Kommt daher *C* nach dieser Drehung nach *C'*, so muss *B* in die Gerade *AC'* fallen. Nun beschreibt bei dieser Drehung die Gerade *BC* die Fläche eines geraden Kegels, von welchem *MN* die Axe ist. Ein Element dieser Kegelfläche ist der Winkel *CBC'*; die durch die Axe gehenden Ebenen *MBC* und *MBC'* müssen folglich mit der Ebene des Winkels *CBC'* unendlich nahe rechte Winkel machen, d. h., weil *BC'* die geradlinige Verlängerung von *AB* ist: die Berührungsebenen *MO* und *MP* der Fläche müssen auf der Krümmungsebene *ABC* der Curve rechtwinklig seyn.

Endpunkten sind. Dies ist die erste Bedingung des Gleichgewichts.

Sodann sind wegen der Gleichheit und unendlichen Kleinheit der Kugeln die Winkel ACB, BCA', $A'C'B'$, etc. unendlich wenig von rechten Winkeln, mithin ihre Sinus um unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung von der Einheit verschieden. Zufolge der Proportion: $T : T' = \sin BCA' : \sin ACB$, ist daher der Unterschied je zweier nächstfolgenden Spannungen nur ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, also erst der Unterschied zweier Spannungen, zwischen welche eine unendliche Menge anderer fallen, d. i. der Spannungen an zwei um einen endlichen Theil des Fadens von einander entfernten Stellen, von der ersten Ordnung, d. h. *die Spannung des Fadens ist überall von gleicher Grösse; ihre Richtung aber ist die der Tangente der Fadencurve.*

Da nun am ersten (letzten) Elemente die Kraft P (Q) mit der vom zweiten (vorletzten) Elemente auf dasselbe hervorgebrachten Spannung das Gleichgewicht halten muss, und dieses Element, gleich den übrigen, an der unbeweglichen Fläche beweglich ist, so ergiebt sich als zweite Bedingung für das Gleichgewicht des Fadens, *dass jede der beiden Kräfte, welche auf den Anfang und das Ende des Fadens wirken, mit der Normale der Fläche und der Tangente des Fadens daselbst in einer Ebene liegt, und dass, wenn man die Kräfte nach diesen Richtungen zerlegt, die tangentialen Kräfte einander (und der Spannung des Fadens) gleich sind und den Faden nach entgegengesetzten Seiten zu ziehen suchen.*

§. 273.

Noch verdient die vom Faden auf die Fläche ausgeübte Pressung näher betrachtet zu werden. Die Pressung, welche die Fläche von einem der unendlich kleinen einander gleichen Kügelchen erleidet, aus denen wir uns den Faden zusammengesetzt vorstellten, ist nach §. 271: $R = T\frac{\sin ACA'}{\sin BCA'} = T\sin ACA'$, (Fig. 74.), weil BCA' unendlich nahe $= 90°$. Es ist aber $\sin ACA' = \sin C_1C'CC'$, und der Sinus des Winkels, den zwei einander gleiche Elemente C_1C und CC' der Curve mit einander machen, ist gleich dem einen der Elemente, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Curve. Mithin ist $R = Tk : r$, wenn r den Krümmungshalbmesser und k die Länge eines der Elemente, oder, was dasselbe ist, den Durchmesser einer der Kugeln bezeichnet.

Von n auf einander folgenden Kugeln, die einen so kleinen Theil $= nk$ des Fadens einnehmen, dass der Krümmungshalbmesser von einem Punkte des Theils zum andern unveränderlich angesehen werden kann, und dass die Pressungen, welche die Kugeln einzeln erzeugen, sowohl ihrer Grösse, als ihrer Richtung nach, nicht merklich von einander verschieden sind, von n solchen Kugeln ist daher nach dem Princip der Zusammensetzung paralleler Kräfte, die Gesammtpressung

$$= nTk : r$$

$$= T\frac{ds}{r},$$

wenn wir die Länge des Fadentheils $= ds$ setzen. Dieses Resultat ist um so richtiger, je kleiner wir ds annehmen, und hängt nur noch insofern von k ab, als ds ein gewisses Vielfache von k ist. Da uns aber nichts hin-

dert, k noch unendlich kleiner als ds, also von der zweiten Ordnung zu nehmen, während wir ds als eine unendlich kleine Linie der ersten Ordnung betrachten, so kann ds, als solche, jede beliebige Länge haben.

Die von einem Elemente des Fadens hervorgebrachte Pressung steht demnach zu der Spannung des Fadens in demselben Verhältnisse, wie die Länge des Elements zu seinem Krümmungshalbmesser.

§. 274.

Zusätze. *a.* Zu dem eben erhaltenen Resultate kann man auch durch folgende einfache Betrachtung gelangen. Auf jedes Element AB (Fig. 76.) des über eine Fläche gespannten Fadens wirken an seinen Enden nach den tangentialen Richtungen AC und BD die einander gleichen Spannungen T, und die Resultante derselben muss mit den Pressungen im Gleichgewichte seyn, welche das Element von der Fläche erleidet. Betrachten wir nun AB als einen unendlich kleinen Bogen eines Kreises, und ist M der Mittelpunkt des letztern und N der Durchschnitt der Tangenten, so halbirt die Gerade NM den Winkel CND, ist folglich die Richtung jener Resultante, und die Intensität derselben ist

$$T \cdot \frac{\sin CND}{\sin CNM} = T \sin AMB = T\frac{ds}{r},$$

wenn wiederum ds die Länge des Elements AB, und r seinen Krümmungshalbmesser MA bezeichnet. Eben so gross, nur von entgegengesetzter Richtung, ist also auch die Resultante der auf das Element ausgeübten Pressungen.

b. Der Coefficient von ds in dem Ausdrucke für die Pressung dieses Elements ist nichts anderes, als die

Gesammtpressung einer der Längeneinheit gleichen Linie, wenn je zwei gleiche Theile derselben nach parallelen Richtungen gleich grosse Pressungen, und zwar jedes dem Fadenelemente *ds* gleiche Linienelement dieselbe Pressung, wie das Fadenelement, erfahren. Dieser Coefficient, den wir die Pressung für einen, dem Elemente *ds* zugehörigen, Punkt des Fadens nennen können, ist von einem Punkte des Fadens zum andern veränderlich, und das Product aus derselben in ein den Punkt mit begreifendes Fadenelement giebt die Pressung dieses letztern, — eben so, wie man bei einem ungleichförmig dichten Körper durch Multiplication der Dichtigkeit an einer gewissen Stelle in ein daselbst befindliches Raumelement die Masse dieses Elements, oder bei einem mit veränderlicher Geschwindigkeit sich bewegenden Punkte durch Multiplication der in einem gewissen Zeitpunkte statt findenden Geschwindigkeit in ein diesen Zeitpunkt mit enthaltendes Zeitelement das während dessen beschriebene Raumelement erhält.

c. Da die Spannung des Fadens überall von gleicher Grösse ist, so verhalten sich die Pressungen für verschiedene Punkte des Fadens umgekehrt, wie die Krümmungshalbmesser, also direct wie die Krümmungen selbst, so dass, wenn der Faden sich geradlinig über die Fläche fortzieht, er eine Pressung weder erleidet, noch ausübt.

d. Ist die Krümmung des Fadens überall gleich gross, so ist auch seine Pressung von einer Stelle zur andern dieselbe. Dies ereignet sich z. B. bei einem Faden, welcher über eine Kugel, oder über einen geraden Cylinder mit kreisförmiger Basis gespannt ist. Denn im erstern Falle ist die Curve ein grösster Kreis

der Kugel, im letztern im Allgemeinen eine cylindrische Spirale (Schraubenlinie). Da, wie sich leicht zeigen lässt, der Krümmungshalbmesser einer solchen Spirale gefunden wird, wenn man den Halbmesser des Cylinders durch das Quadrat des Sinus des Winkels dividirt, den die Elemente der Spirale mit der Axe des Cylinders machen, so ist bei gleicher Spannung die Pressung des spiralförmigen Fadens diesem Quadrate proportional, mithin desto stärker, je mehr sich der Winkel der Spirale mit der Axe einem rechten nähert; am stärksten, wenn dieser Winkel ein rechter ist, und damit die Spirale in einen auf der Axe normalen Kreis übergeht; am schwächsten dagegen, oder vielmehr null, wenn der Faden parallel mit der Axe und daher geradlinig ist.

e. Die zwei Kräfte am Anfange und Ende des Fadens müssen dergestalt gerichtet seyn, dass sie den Faden spannen, d. h. die Elemente desselben von einander zu trennen, nicht sie gegen einander zu drücken streben, indem sonst wegen der Unsicherheit des Gleichgewichts jedes Elements das Gleichgewicht des Ganzen keinen Bestand haben könnte. Da ferner in der Wirklichkeit der Faden über die Fläche nur gelegt, nicht unzertrennlich mit ihr verbunden ist, so muss die Pressung, welche Faden und Fläche auf einander ausüben, ein gegenseitiger Druck seyn, und der Faden muss daher der Fläche seine hohle Seite zukehren. — Wäre der Faden gegen die Fläche erhaben und würde er von den Kräften gespannt, so würde er sich von der Fläche trennen, sein Gleichgewicht aber würde ein sicheres seyn, wenn die Trennung auf irgend eine Weise verhindert werden könnte. — Wenn dagegen der gegen die Fläche erhabene Faden von den Kräften an beiden

Gesammtpressung einer der Längeneinheit gleichen Linie, wenn je zwei gleiche Theile derselben nach parallelen Richtungen gleich grosse Pressungen, und zwar jedes dem Fadenelemente *ds* gleiche Linienelement dieselbe Pressung, wie das Fadenelement, erfahren. Dieser Coefficient, den wir die Pressung für einen, dem Elemente *ds* zugehörigen, Punkt des Fadens nennen können, ist von einem Punkte des Fadens zum andern veränderlich, und das Product aus derselben in ein den Punkt mit begreifendes Fadenelement giebt die Pressung dieses letztern, — eben so, wie man bei einem ungleichförmig dichten Körper durch Multiplication der Dichtigkeit an einer gewissen Stelle in ein daselbst befindliches Raumelement die Masse dieses Elements, oder bei einem mit veränderlicher Geschwindigkeit sich bewegenden Punkte durch Multiplication der in einem gewissen Zeitpunkte statt findenden Geschwindigkeit in ein diesen Zeitpunkt mit enthaltendes Zeitelement das während dessen beschriebene Raumelement erhält.

c. Da die Spannung des Fadens überall von gleicher Grösse ist, so verhalten sich die Pressungen für verschiedene Punkte des Fadens umgekehrt, wie die Krümmungshalbmesser, also direct wie die Krümmungen selbst, so dass, wenn der Faden sich geradlinig über die Fläche fortzieht, er eine Pressung weder erleidet, noch ausübt.

d. Ist die Krümmung des Fadens überall gleich gross, so ist auch seine Pressung von einer Stelle zur andern dieselbe. Dies ereignet sich z. B. bei einem Faden, welcher über eine Kugel, oder über einen geraden Cylinder mit kreisförmiger Basis gespannt ist. Denn im erstern Falle ist die Curve ein grösster Kreis

der Kugel, im letztern im Allgemeinen eine cylindrische Spirale (Schraubenlinie). Da, wie sich leicht zeigen lässt, der Krümmungshalbmesser einer solchen Spirale gefunden wird, wenn man den Halbmesser des Cylinders durch das Quadrat des Sinus des Winkels dividirt, den die Elemente der Spirale mit der Axe des Cylinders machen, so ist bei gleicher Spannung die Pressung des spiralförmigen Fadens diesem Quadrate proportional, mithin desto stärker, je mehr sich der Winkel der Spirale mit der Axe einem rechten nähert; am stärksten, wenn dieser Winkel ein rechter ist, und damit die Spirale in einen auf der Axe normalen Kreis übergeht; am schwächsten dagegen, oder vielmehr null, wenn der Faden parallel mit der Axe und daher geradlinig ist.

e. Die zwei Kräfte am Anfange und Ende des Fadens müssen dergestalt gerichtet seyn, dass sie den Faden spannen, d. h. die Elemente desselben von einander zu trennen, nicht sie gegen einander zu drücken streben, indem sonst wegen der Unsicherheit des Gleichgewichts jedes Elements das Gleichgewicht des Ganzen keinen Bestand haben könnte. Da ferner in der Wirklichkeit der Faden über die Fläche nur gelegt, nicht unzertrennlich mit ihr verbunden ist, so muss die Pressung, welche Faden und Fläche auf einander ausüben, ein gegenseitiger Druck seyn, und der Faden muss daher der Fläche seine hohle Seite zukehren. — Wäre der Faden gegen die Fläche erhaben und würde er von den Kräften gespannt, so würde er sich von der Fläche trennen, sein Gleichgewicht aber würde ein sicheres seyn, wenn die Trennung auf irgend eine Weise verhindert werden könnte. — Wenn dagegen der gegen die Fläche erhabene Faden von den Kräften an beiden

welche dreien derselben begegnet, auch die vierte trifft.

§. 279.

Das Gleichgewicht eines über eine Fläche gespannten Fadens wird nicht unterbrochen, wenn man die Fläche wegnimmt und statt der Pressungen, welche sie auf den Faden ausübte, Kräfte nach denselben Richtungen und von denselben Intensitäten auf ihn wirken lässt, Kräfte also, deren Richtungen überall normal auf dem Faden sind, in seiner Krümmungsebene liegen und von seiner hohlen Seite nach der erhabenen zu gehen, deren Intensität aber für jeden einzelnen Punkt des Fadens als verschwindend zu betrachten ist, indem die Resultante aller der auf einen unendlich kleinen Theil ds des Fadens wirkenden Kräfte ebenfalls unendlich klein, $= Pds$ ist, wo P die Spannung, dividirt durch den Krümmungshalbmesser, bedeutet (§. 273.).

Soll umgekehrt ein frei beweglicher Faden im Gleichgewichte seyn, wenn dessen Anfangs- und Endpunkt unbeweglich sind, und wenn normal auf jedes seiner Elemente ds eine Kraft Pds wirkt, wo P eine von einem Punkte des Fadens zum andern nach einem noch zu bestimmenden Gesetze veränderliche Grösse ist, so muss die Richtung der Kraft in der Krümmungsebene des Elements liegen, und P dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional seyn. Denn am Elemente ds oder AB (Fig. 76.) halten sich die Kraft Pds und die zwei Spannungen an den Endpunkten A und B des Elements das Gleichgewicht. Die Kraft Pds muss daher mit den an die Fadencurve in A und B gelegten Tangenten AC und BD, als den Richtun-

in einer Ebene liegen, und es müsste, wenn man die Spannung P in A nach tangentialer und normaler Richtung zerlegte, die tangentiale Kraft der Spannung T gleich und entgegengesetzt seyn (§. 272.). Weil aber die Richtung AC nicht in das Innere des von der Fläche begränzten Körpers gehen kann, so würde auch die normale Kraft nach aussen zu gerichtet seyn, folglich den Punkt A vom Körper abwärts treiben und damit das Gleichgewicht aufheben. Die normale Kraft muss folglich null, und daher die Spannung P der Spannung T in A gleich und entgegengesetzt seyn. Aehnliches wird rücksichtlich der Spannungen T und Q des Punktes B bewiesen. Mithin sind CA und BD die Tangenten an AB in A und B, und $P=T=Q$.

§. 276.

Wir haben bisher die Fläche, über welche ein Faden gespannt ist, als unbeweglich betrachtet. Ist sie dieses nicht, sondern entweder zum Theil, oder vollkommen frei beweglich, so muss man noch das Gleichgewicht berücksichtigen, welches am Körper, dem die Fläche zur Grenze dient, die vom Faden auf ihn ausgeübte Pressung mit den übrigen auf ihn wirkenden Kräften hält. Da aber am Faden die Pressung, welche er von der Fläche erleidet, mit den Spannungen der zwei Punkte des Fadens im Gleichgewichte ist, in denen er nach tangentialer Richtung von der Fläche abgeht, so kann man statt der Pressung des Fadens gegen die Fläche auch diese zwei Spannungen, d. h. zwei einander und der Spannung gleiche Kräfte, setzen, welche in den besagten zwei Punkten nach den geradlinig fortgehenden Richtungen des Fadens wirken. Auch erhellet dieses sogleich daraus, dass man, unbeschadet

welche dreien derselben begegnet, auch die vierte trifft.

§. 279.

Das Gleichgewicht eines über eine Fläche gespannten Fadens wird nicht unterbrochen, wenn man die Fläche wegnimmt und statt der Pressungen, welche sie auf den Faden ausübte, Kräfte nach denselben Richtungen und von denselben Intensitäten auf ihn wirken lässt, Kräfte also, deren Richtungen überall normal auf dem Faden sind, in seiner Krümmungsebene liegen und von seiner hohlen Seite nach der erhabenen zu gehen, deren Intensität aber für jeden einzelnen Punkt des Fadens als verschwindend zu betrachten ist, indem die Resultante aller der auf einen unendlich kleinen Theil ds des Fadens wirkenden Kräfte ebenfalls unendlich klein, $= Pds$ ist, wo P die Spannung, dividirt durch den Krümmungshalbmesser, bedeutet (§. 273.).

Soll umgekehrt ein frei beweglicher Faden im Gleichgewichte seyn, wenn dessen Anfangs- und Endpunkt unbeweglich sind, und wenn normal auf jedes seiner Elemente ds eine Kraft Pds wirkt, wo P eine von einem Punkte des Fadens zum andern nach einem noch zu bestimmenden Gesetze veränderliche Grösse ist, so muss die Richtung der Kraft in der Krümmungsebene des Elements liegen, und P dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional seyn. Denn am Elemente ds oder AB (Fig. 76.) halten sich die Kraft Pds und die zwei Spannungen an den Endpunkten A und B des Elements das Gleichgewicht. Die Kraft Pds muss daher mit den an die Fadencurve in A und B gelegten Tangenten AC und BD, als den Richtun-

gen der Spannungen, in einer Ebene, also in der Krümmungsebene des Elements, liegen. Sie muss ferner durch den Durchschnitt N dieser Tangenten, und weil sie zugleich auf dem Elemente normal seyn soll, durch den Mittelpunkt M seiner Krümmung gehen. Da hiernach die Richtung von Pds den Winkel CVD halbirt, so sind die Spannungen in A und B, und eben so in je zwei andern unendlich nahe auf einander folgenden Punkten gleich gross, also die Spannung in allen Punkten des Fadens von constanter Grösse. Diese Spannung aber verhält sich zur Kraft Pds wie $\sin ANM$ zu $\sin AMB$ (§. 274. *a.*), d. i. wie AM oder der Krümmungshalbmesser zu $AB, = ds$, woraus das Uebrige von selbst folgt.

---

§. 280.

Die so eben angestellte Betrachtung über das Gleichgewicht eines Fadens, auf welchen überall normale Kräfte wirken, wollen wir jetzt ganz verallgemeinern und die Bedingungen des Gleichgewichts zu bestimmen suchen, wenn auf jedes Element ds eines vollkommen biegsamen und bis auf seine zwei befestigten Endpunkte frei beweglichen Fadens eine der Länge des Elements proportionale, übrigens aber ihrer Intensität und Richtung nach beliebig gegebene, Kraft Pds wirkt.

Sey demnach in Bezug auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem die Kraft P aus den drei mit den Coordinatenaxen parallelen Kräften X, Y, Z zusammengesetzt, und diese Kräfte irgend welche Functionen der Coordinaten x, y, z, welche einem Punkte des Elements ds zugehören. Den Faden wollen wir uns, wie im Obigen, aus einander sich berührenden, einander gleichen Kugeln gebildet vorstellen, deren jede

werden, da in ihnen nur Differentiale der ersten Ordnung vorkommen. Es kann daher, statt ds, auch von einer der übrigen veränderlichen Grössen das erste Differential constant gesetzt werden, so dass je zwei nächstfolgende ds um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung von einander verschieden sind. Auch sieht man leicht, dass die zu Anfange des vor. §. gemachten Schlüsse an Richtigkeit nicht verlieren, wenn man die Durchmesser je zweier an einander liegenden Kügelchen um die zweite Ordnung von einander verschieden seyn lässt.

b. Den Gleichungen (4) kann man nach Wegschaffung der Bruchform, und wenn man von neuem integrirt, auch die Gestalt der drei Integralgleichungen geben:

$$(4^*)\quad \begin{cases} \int dx \int Y ds - \int dy \int Z ds = 0, \\ \int dx \int Z ds - \int dz \int X ds = 0, \\ \int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = 0, \end{cases}$$

von denen jede eine Folge der beiden übrigen ist, und wo die neu hinzuzufügenden Constanten unter den neuen Integrationszeichen mit begriffen sind.

Diese Gleichungen lassen sich noch unter einer besondern Bedeutung auffassen. Man kann nämlich, mit Anwendung der bekannten Reductionsformel $\int u dv = uv - \int v du$, statt der dritten Gleichung z. B., — die, wenn die Kräfte, und mithin auch die Fadencurve, in einer einzigen Ebene (der x, y) enthalten sind, die alleinige Bedingung des Gleichgewichts ist, — auch schreiben:

$$(\alpha)\quad y \int X ds - \int y X ds - x \int Y ds + \int x Y ds = 0.$$

Hierin gehören die Coordinaten x, y, welche ausserhalb des Zeichens $\int$ stehen, dem Punkte der Fadencurve an, bis zu welchen man integrirt, während

die unter dem Zeichen befindlichen x, y sich auf alle vom Anfangspunkte bis dahin liegenden Zwischenpunkte der Curve beziehen. Bezeichnet man daher erstere Coordinaten, um sie von den letztern zu unterscheiden, durch x', y', so kann man für (a) auch setzen:

$$\int[(x-x')\,Yds-(y-y')\,Xds]=0.$$

Da nun x, y die Coordinaten des Elements ds sind, und daher das in Klammern Eingeschlossene nichts anderes, als das Moment der auf ds wirkenden Kraft (Xds, Yds) in Bezug auf den Punkt (x', y') ist, so drückt die Gleichung unter dieser Form aus, dass das Moment aller auf den Faden von seinem Anfange bis zum Punkte (x', y') wirkenden Kräfte in Bezug auf den letztern Punkt null ist.

Ist die Curve nicht in einer Ebene, oder doch nicht in der Ebene der x, y, begriffen, so zeigt dieselbe Gleichung an, dass das Moment der Kräfte, welche auf den Faden von seinem Anfange bis zum Punkte (x', y', z'), bis zu welchen man die Integration erstreckt, wirken, in Bezug auf eine durch den letztern Punkt parallel mit der Axe der z gelegte Axe null ist. Analoge Bedeutung haben die zwei ersten Gleichungen in (4°) rücksichtlich der Axen der x und der y.

Der unmittelbare Grund dieses Ergebnisses liegt offenbar darin, dass, wenn der Faden im Gleichgewichte ist, an jedem Theile desselben die auf die Elemente des Theils wirkenden Kräfte und die Spannungen am Anfange und Ende des Theils eben so, wie an einem frei beweglichen festen Körper, im Gleichgewichte mit einander seyn müssen. Zugleich folgt hieraus, dass man zu den drei Integralen $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$ die nach

werden, da in ihnen nur Differentiale der ersten Ordnung vorkommen. Es kann daher, statt ds, auch von einer der übrigen veränderlichen Grössen das erste Differential constant gesetzt werden, so dass je zwei nächstfolgende ds um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung von einander verschieden sind. Auch sieht man leicht, dass die zu Anfange des vor. §. gemachten Schlüsse an Richtigkeit nicht verlieren, wenn man die Durchmesser je zweier an einander liegenden Kügelchen um die zweite Ordnung von einander verschieden seyn lässt.

b. Den Gleichungen (4) kann man nach Wegschaffung der Bruchform, und wenn man von neuem integrirt, auch die Gestalt der drei Integralgleichungen geben:

$$(4^*)\quad \begin{cases} \int dz \int Y ds - \int dy \int Z ds = 0, \\ \int dx \int Z ds - \int dz \int X ds = 0, \\ \int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = 0, \end{cases}$$

von denen jede eine Folge der beiden übrigen ist, und wo die neu hinzuzufügenden Constanten unter den neuen Integrationszeichen mit begriffen sind.

Diese Gleichungen lassen sich noch unter einer besondern Bedeutung auffassen. Man kann nämlich, mit Anwendung der bekannten Reductionsformel $\int u dv = uv - \int v du$, statt der dritten Gleichung z. B., — die, wenn die Kräfte, und mithin auch die Fadencurve, in einer einzigen Ebene (der x, y) enthalten sind, die alleinige Bedingung des Gleichgewichts ist, — auch schreiben:

$$(\alpha)\quad y \int X ds - \int y X ds - x \int Y ds + \int x Y ds = 0.$$

Hierin gehören die Coordinaten x, y, welche ausserhalb des Zeichens $\int$ stehen, dem Punkte der Fadencurve an, bis zu welchen man integrirt, während

der Krümmungsebene enthalten seyn muss, liegt begreiflich darin, dass die Krümmungsebene des Elements ds durch die zwei an den Anfangs- und Endpunkt des Elements gelegten Tangenten bestimmt wird, und dass mit den zwei nach diesen Tangenten wirkenden Spannungen des Elements die Kraft Pds das Gleichgewicht hält.

— Ausser der Gleichung (7) kann man aus (2*) noch eine von T und dT freie Gleichung erhalten, indem man daraus T und dT einzeln bestimmt und alsdann den Werth von dT dem Differentiale des Werthes von T gleich setzt. Die auf diese Weise sich ergebende Gleichung enthält daher noch die Differentiale von X, Y, Z; sie vertritt in Verbindung mit (7) die Stelle der zwei Integralgleichungen (4).

§. 283.

Zusätze. *a.* Um die Werthe von T und dT aus den drei Gleichungen (2*) zu finden, hat man jedesmal nur zwei der letztern zu berücksichtigen nöthig. Sollen aber diese Werthe zugleich eine symmetrische Form haben, so kann man folgendergestalt verfahren. Man multiplicire die Gleichungen (2*) resp. mit ξ, η, ζ und addire sie, so kommt mit Anwendnng von (5) und (6):

$$(8)\quad Xdx + Ydy + Zdz + dT = 0.$$

Eben so findet sich durch Addition derselben Gleichungen, nachdem man sie zuvor mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ multiplicirt hat:

$$(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta)ds + T(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) = 0,$$

oder, wenn r den Krümmungshalbmesser bezeichnet:

$$(9)\quad Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta + T\frac{ds}{r^2} = 0;$$

$$(2^*)\quad \begin{cases} Xds + Td\xi + \xi dT = 0, \\ Yds + Td\eta + \eta dT = 0, \\ Zds + Td\zeta + \zeta dT = 0. \end{cases}$$

Um nun zuerst aus diesen Gleichungen T und dT mit einem Male zu eliminiren, multiplicire man sie resp. mit den Coefficienten l, m, n, addire sie und bestimme die Coefficienten so, dass

$$(a)\quad \begin{cases} l\xi + m\eta + n\zeta = 0, \\ ld\xi + md\eta + nd\zeta = 0, \text{ so ist auch} \end{cases}$$

$$(b)\quad lX + mY + nZ = 0.$$

Aus (a) aber folgt $l : m : n = \eta d\zeta - \zeta d\eta$: etc., mithin

$$(7)\quad X(\eta d\zeta - \zeta d\eta) + Y(\zeta d\xi - \xi d\zeta) + Z(\xi d\eta - \eta d\xi) = 0,$$

eine von der Spannung freie Gleichung, welche zu erkennen giebt, *dass die Richtung der Kraft* (X, Y, Z) *oder* P *in der Krümmungsebene der Fadencurve liegen muss.* Denn nehmen wir den Punkt (x, y, z) zum Anfangspunkte der Coordinaten, so geht diese Ebene durch die drei auf einander folgenden Punkte der Curve: $(0, 0, 0)$, (dx, dy, dz) oder $(\xi ds, \eta ds, \zeta ds)$ und $(2dx + d^2x, 2dy + d^2y, 2dz + d^2z)$ oder $(2\xi ds + d\xi ds + \xi d^2s, \ldots)$. Setzen wir daher die Gleichung der durch den jetzigen Anfangspunkt gehenden Krümmungsebene:

$$lu + mv + nw = 0,$$

wo u, v, w die Coordinaten bezeichnen, so muss seyn:

$$l\xi ds + m\eta ds + n\zeta ds = 0,$$
$$l[\xi(2ds + d^2s) + d\xi ds] + \ldots = 0;$$

und diese zwei Gleichungen lassen sich, wie man augenblicklich wahrnimmt, auf die Gleichungen (a) reduciren. Der Gleichung (b) zufolge ist aber auch die Richtung von (X, Y, Z) in dieser Ebene begriffen.

Der statische Grund, aus welchem die Kraft P in

Werth von P umgekehrt dem Krümmungshalbmesser der ebenen Curve proportional ist, von welcher x und y die rechtwinkligen Coordinaten sind *).

§. 284.

Untersuchen wir noch die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn der in allen seinen Theilen der Wirkung von Kräften unterworfene Faden nicht mehr frei, wie in den vorigen §§., sondern auf einer gegebenen Fläche beweglich ist. Alsdann wirkt auf jedes Element ds desselben ausser der Kraft Pds noch der Druck der Fläche. Dieser Druck ist auf der Fläche rechtwinklig, und kann, da er der Länge des Elements gleichfalls proportional ist, $= Rds$ gesetzt werden. Man kann daher aus den obigen für das Gleichgewicht eines freien Fadens gegebenen Formeln sogleich die für den

---

*) Dies lässt sich auch leicht geradezu darthun. Sey zu dem Ende $dy = pdx$, so wird die Gleichung

$$-\int Pdx = p\int Ppdx$$

und wenn man differentiirt:

$$-Pdx = dp\int Ppdx + Pp^2dx.$$

Bringt man diese Gleichung unter die Form

$$\frac{Pdx}{\int Ppdx} = -\frac{pdp}{1+p^2}$$

und integrirt dann wiederum, so kommt:

$$\log\int Ppdx = \log C - \tfrac{1}{2}\log(1+p^2),$$

wo $\log C$ die hinzuzufügende Constante ist. Eine abermalige Differentiation der letztern Gleichung, nachdem sie vorher auf die Form

$$\int Ppdx = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}$$

gebracht worden, giebt endlich

$$-\frac{C}{P} = (1+p^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dp}.$$

Dieser dem P umgekehrt proportionale Ausdruck ist aber bekanntlich der des Krümmungshalbmessers.

Setzen wir umgekehrt $dT = 0$, so folgt aus (11) $\varphi = 90°$, und aus (12) $P = T : r$, d. h. P ist auf der Fadencurve normal und im umgekehrten Verhältnisse mit r. Hieraus fliesst folgender für die analytische Geometrie bemerkenswerthe Lehrsatz:

Sind x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten einer Curve im Raume, und X, Y, Z solche Functionen von x, y, z, dass den Gleichungen

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$
$$\frac{dx}{\int Xds} = \frac{dy}{\int Yds} = \frac{dz}{\int Zds}$$

Genüge geschieht, so hat eine durch den Punkt (x, y, z) der Curve gelegte gerade Linie, von welcher X, Y, Z die rechtwinkligen Projectionen auf die drei Coordinatenebenen sind, die Richtung des Krümmungshalbmessers daselbst und ist ihrer Länge nach demselben umgekehrt proportional, welche daher, wenn a eine gewisse, noch zu bestimmende Constante bezeichnet, $= a : \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ ist.

Ist die Curve in einer Ebene enthalten, und lässt man diese die Ebene der x, y seyn, so werden z und Z null, und die vorigen Gleichungen reduciren sich auf

$$Xdx + Ydy = 0,$$
$$dx \int Yds = dy \int Xds.$$

Man setze nun $X = -P\frac{dy}{ds}$, so wird wegen der erstern dieser Gleichungen $Y = P\frac{dx}{ds}$, mithin $P = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$, und die letztere verwandelt sich in:

$$dx \int Pdx + dy \int Pdy = 0.$$

Diese einfache Gleichung besitzt demnach die merkwürdige Eigenschaft, dass der durch sie bestimmte

Werth von P umgekehrt dem Krümmungshalbmesser der ebenen Curve proportional ist, von welcher x und y die rechtwinkligen Coordinaten sind *).

§. 284.

Untersuchen wir noch die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn der in allen seinen Theilen der Wirkung von Kräften unterworfene Faden nicht mehr frei, wie in den vorigen §§., sondern auf einer gegebenen Fläche beweglich ist. Alsdann wirkt auf jedes Element ds desselben ausser der Kraft Pds noch der Druck der Fläche. Dieser Druck ist auf der Fläche rechtwinklig, und kann, da er der Länge des Elements gleichfalls proportional ist, $= Rds$ gesetzt werden. Man kann daher aus den obigen für das Gleichgewicht eines freien Fadens gegebenen Formeln sogleich die für den

*) Dies lässt sich auch leicht geradezu darthun. Sey zu dem Ende $dy = pdx$, so wird die Gleichung

$$-\int Pdx = p\int Ppdx$$

und wenn man differentiirt:

$$-Pdx = dp\int Ppdx + Pp^2dx.$$

Bringt man diese Gleichung unter die Form

$$\frac{Pdx}{\int Ppdx} = -\frac{pdp}{1+p^2}$$

und integrirt dann wiederum, so kommt:

$$\log\int Ppdx = \log C - \tfrac{1}{2}\log(1+p^2),$$

wo $\log C$ die hinzuzufügende Constante ist. Eine abermalige Differentiation der letztern Gleichung, nachdem sie vorher auf die Form

$$\int Ppdx = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}$$

gebracht worden, giebt endlich

$$-\frac{C}{P} = (1+p^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dp}.$$

Dieser dem P umgekehrt proportionale Ausdruck ist aber bekanntlich der des Krümmungshalbmessers.

durch den Krümmungshalbmesser gleich, — Alles übereinstimmend mit den schon in §. 272. und §. 273. gefundenen Resultaten.

§. 286.

Die Kraft P in dem Ausdrucke Pds ist, wie bereits erinnert worden (§. 274. *b.*), die Resultante von Kräften, welche auf eine Linie, deren Länge $= 1$, nach parallelen Richtungen wirken, dergestalt, dass jedes Element der Linie, welches mit dem Elemente ds des Fadens gleiche Länge hat, von derselben Kraft, wie dieses ds, afficirt wird. Da aber in der Wirklichkeit jedes Element des Fadens ein kleiner physischer Körper ist und, als solcher, eine gewisse Masse hat, und da die Schwerkraft und die andern in der Natur vorkommenden Kräfte sich über alle Theilchen eines Körpers, der Masse der Theilchen proportional, verbreiten, so pflegt man die auf ein Fadenelement wirkende Kraft dadurch zu bestimmen, dass man die Stärke der Kraft bei einer Masse $= 1$ angiebt, also annimmt, dass an einem Körper, dessen Masse $= 1$, auf jedes Theilchen, dessen Masse der des Fadenelements gleich ist, eine eben so grosse Kraft, als auf dieses Element, nach paralleler Richtung wirke, und von allen diesen parallelen Kräften die Resultante bestimmt.

Hat nun die Kraft P diese letztere Bedeutung, so muss man sie, um ihre Wirkung auf das Element ds zu erhalten, in die Masse des Elements multipliciren. Letztere ist, wenn die Dichtigkeit des Elements $= \varrho$, und der auf seiner Länge rechtwinklige Durchschnitt $= \varepsilon$ gesetzt wird, $= \varrho\varepsilon ds$, und folglich $P\varrho\varepsilon ds$ der dann statt des vorigen Pds zu substituirende Ausdruck. Auf

gleiche Art hat man statt der vorigen X, Y, Z dieselben Grössen, noch mit $\varrho\varepsilon$ multiplicirt, zu setzen. Dabei sind ϱ und ε, als von einem Punkte des Fadens zum andern im Allgemeinen veränderliche Grössen, Functionen der von seinem Anfangspunkte bis zum Punkte (x, y, z) gerechneten Länge s des Fadens, also auch Functionen von x, y, z selbst.

Von der Kettenlinie.

§. 287.

Die bisher vorgetragene allgemeine Theorie des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden wollen wir jetzt auf den einfachen Fall anwenden, *wenn sämmtliche auf die Elemente des Fadens wirkende Kräfte einander parallel sind, der Faden selbst aber nur mit seinen beiden Endpunkten befestigt, sonst frei beweglich ist.* Man lege zu dem Ende das Coordinatensystem so, dass die Axe der y parallel mit den Kräften wird, so ist durchweg $X = 0$, $Z = 0$, folglich $\int X ds = A$, $\int Z ds = C$, wo A und C noch zu bestimmende Constanten bedeuten, und man erhält nach den Formeln (4) in §. 280:

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{\int Y ds} = \frac{dz}{C}.$$

Hieraus fliesst durch nochmalige Integration

$$Az = Cx + D,$$

d. h. *die Fadencurve ist in einer* mit der Axe der y, also *mit den Kräften parallelen Ebene enthalten.* Werde diese Ebene zu der Ebene der x, y genommen. Weil $z = 0$ die Gleichung der letztern ist, so werden

damit $C = 0$ und $D = 0$, und wir haben nur noch die Gleichung

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{\int Y ds} \text{ oder } \int Y ds = Ap, \text{ wo } p = \frac{dy}{dx},$$

zu berücksichtigen, woraus sich, wenn Y, als Function von x und y, gegeben ist, die Gleichung für die Fadencurve, und umgekehrt, wenn letztere gegeben ist, die Function Y finden lässt.

Die Spannung T des Fadens im Punkte (x, y) ist aus den zwei mit den Axen der x und y parallelen Theilen $U = -\int X ds = -A$ und $V = -\int Y ds = -Ap$ zusammengesetzt (§. 280.), mithin

$$T = -A\sqrt{1 + p^2} = -A\frac{ds}{dx}.$$

Die Spannung ist daher in jedem Punkte umgekehrt dem Sinus des Winkels proportional, den die den Faden daselbst Berührende mit der Axe der y, d. i. mit der Richtung der Kräfte, macht.

Sind demnach NK und $N'K'$ (Fig. 79.) zwei an zwei Punkte N und N' des Fadens gelegte Tangenten und schneiden dieselben eine mit den Kräften parallel gezogene Gerade IKK' in K und K', sich selbst aber in L, so verhalten sich die Spannungen in N und N', wie die Sinus von $IK'N'$ und IKN, also auch wie KL und $K'L$, d. h.:

Zwei einen Faden, der unter Einwirkung paralleler Kräfte im Gleichgewichte ist, berührende Seiten eines Dreiecks, dessen dritte Seite mit den Kräften parallel ist, verhalten sich wie die Spannungen des Fadens in den Berührungspunkten.

gleiche Art hat man statt der vorigen X, Y, Z dieselben Grössen, noch mit $\varrho\varepsilon$ multiplicirt, zu setzen. Dabei sind ϱ und ε, als von einem Punkte des Fadens zum andern im Allgemeinen veränderliche Grössen, Functionen der von seinem Anfangspunkte bis zum Punkte (x, y, z) gerechneten Länge s des Fadens, also auch Functionen von x, y, z selbst.

Von der Kettenlinie.

§. 287.

Die bisher vorgetragene allgemeine Theorie des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden wollen wir jetzt auf den einfachen Fall anwenden, *wenn sämmtliche auf die Elemente des Fadens wirkende Kräfte einander parallel sind, der Faden selbst aber nur mit seinen beiden Endpunkten befestigt, sonst frei beweglich ist.* Man lege zu dem Ende das Coordinatensystem so, dass die Axe der y parallel mit den Kräften wird, so ist durchweg $X = 0$, $Z = 0$, folglich $\int X ds = A$, $\int Z ds = C$, wo A und C noch zu bestimmende Constanten bedeuten, und man erhält nach den Formeln (4) in §. 280:

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{\int Y ds} = \frac{dz}{C}.$$

Hieraus fliesst durch nochmalige Integration

$$Az = Cx + D,$$

d. h. *die Fadencurve ist in einer* mit der Axe der y, also *mit den Kräften parallelen Ebene enthalten.* Werde diese Ebene zu der Ebene der x, y genommen. Weil $z = 0$ die Gleichung der letztern ist, so werden

wichts des zwischen beiden Punkten begriffenen Theiles der Kette gleich.

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellet auch schon daraus, dass alle Kräfte, welche auf einen vom Scheitel S (Fig. 80.) anfangenden Theil SM der Kettenlinie wirken, auch dann noch sich das Gleichgewicht halten, wenn sie parallel mit ihren Richtungen an einen und denselben Punkt getragen werden. Diese Kräfte sind die Spannungen τ und T in S und M und die Resultante gs aller Wirkungen der Schwerkraft auf den zwischen S und M enthaltenen Theil des Fadens. Die Richtungen von τ und gs schneiden sich aber rechtwinklig; folglich etc.

Die andere Gleichung für die Spannung, $T=gy$, giebt zu erkennen, *dass die Spannung in irgend einem Punkte M der Kettenlinie dem Gewichte eines Theils des Fadens gleich ist, welcher den Abstand des Punktes M von der Directrix zur Länge hat. Das Gleichgewicht des die Kettenlinie bildenden Fadens wird daher nicht unterbrochen, wenn man letztern in M über eine unendlich kleine daselbst angebrachte Rolle führt und bis zu der Directrix frei herabhängen lässt.*

Ist folglich, — so können wir umgekehrt schliessen, — *ein über zwei unendlich kleine Rollen gelegter und mit beiden Enden frei herabhängender Faden im Gleichgewichte, so liegen die beiden Enden in einer Horizontalen, nämlich in der Directrix der vom mittlern Theile des Fadens zwischen den Rollen gebildeten Kettenlinie.*

§. 292.

Zusätze. *a.* Eine unmittelbare Folgerung aus

§. 288.

Der in der Wirklichkeit am häufigsten vorkommende und am meisten interessirende Fall ist derjenige, wenn der Faden überall gleiche Dicke und Dichtigkeit hat, und wenn die auf ihn wirkende Kraft die Schwerkraft ist. Die unter diesen Umständen vom Faden gebildete Curve heisst vorzugsweise die Kettenlinie. Da die Schwerkraft nach verticaler Richtung von oben nach unten auf gleiche Massen gleiche Wirkung ausübt, so ist, wenn wir ihre Wirkung auf einen Fadentheil, dessen Länge $= 1$ ist, oder das Gewicht dieses Theils, g nennen, g eine constante Grösse, und wir haben, wenn wir die positive Richtung der Axe der y vertical, von unten nach oben gehend, annehmen, $Y = -g$ zu setzen. Hiermit wird $\int Y ds = -gs + B$, und die obige Bedingungsgleichung geht über in:

$$-gs + B = Ap.$$

Von welchem Punkte aus die Fadenlänge, nach der einen Seite zu positiv, nach der andern negativ, gerechnet wird, ist noch willkührlich. Werde hierzu derjenige Punkt S (Fig. 80.) genommen, in welchem die Tangente der Curve horizontal, also $p = 0$ ist. Weil hiernach s und p zugleich null werden sollen, so wird auch die Constante $B = 0$, und die Gleichung reducirt sich auf

$$hs = p,$$

wenn man noch $-\frac{g}{A} = h$ setzt.

Dies ist demnach die Gleichung der Kettenlinie, und zwar in der möglich einfachsten Form. Sie besteht zwischen den von S aus gerechneten Bogen s und der trigonometrischen Tangente p des Winkels, den die an die Curve gelegte Berührende mit der ho-

a. So wie im Punkte (x, y) der Kettenlinie die Spannung $T = gy$ ist, so ist sie in irgend einem andern Punkte (x', y') der Linie, $= gy'$, und daher, wenn letztere Spannung T' genannt wird:

$$T' - T = g(y' - y),$$

eine Gleichung, welche auch unmittelbar durch Integration der Gleichung (8) in §. 283. hervorgeht, wenn man darin, wie es hier der Fall ist, $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$ setzt. Sie drückt den Satz aus, dass der Unterschied zwischen den Spannungen in zwei Punkten des die Kettenlinie bildenden Fadens dem Gewichte eines Theils desselben Fadens gleich ist, dessen Länge die Höhe des einen Punktes über den andern misst.

Dieser Satz lässt sich übrigens auch ohne Anwendung der bisher vorgetragenen Theorie durch folgende einfache Betrachtung darthun. — Seyen M und N (Fig. 80.) zwei Punkte einer Kettenlinie, M der tiefere, N der höhere, und L ein dritter Punkt, welcher mit M in einer Verticalen und mit N in einer Horizontalen liegt. Man befestige in M, N und L drei unendlich kleine Rollen und lege von L bis N einen geraden horizontalen Steg. Man führe hierauf den über N hinausgehenden Theil des Fadens über die Rolle N und den Steg NL bis L, und den über M hinaus sich erstreckenden Theil des Fadens unter der Rolle M weg in verticaler Richtung gleichfalls bis L und verknüpfe ihn über der in L angebrachten Rolle mit dem ersten Theile, so dass man einen über drei Rollen gelegten, in sich zurücklaufenden Faden erhält. Ist nun dieser Faden, sich selbst überlassen, in Ruhe, — denn eine continuirliche Bewegung desselben anzunehmen, streitet gegen die Unmöglichkeit einer solchen — so wird jeder seiner drei Theile noch die vorige Form

letzterem Satze ist, *dass, wenn man einen in sich zurücklaufenden Faden über zwei unendlich kleine Rollen A und B* (Fig. 81.) *hängt, die zwei Kettenlinien ASB und AS'B, welche er somit bildet, eine gemeinschaftliche Directrix haben.* Denn lässt man von einer der beiden Rollen, A, einen Faden frei herabhängen, von solcher Länge AC, dass sein Gewicht der Spannung im Punkte A des in sich zurücklaufenden Fadens gleich ist, so wird, weil A als gemeinschaftlicher Punkt der beiden Kettenlinien zu betrachten ist, die durch C gelegte Horizontale CD sowohl der einen, als der andern Kettenlinie, als Directrix zugehören.

b. Sey D der Fusspunkt des von der andern Rolle B auf die gemeinschaftliche Directrix gefällten Perpendikels, und S, S' die Scheitel der beiden Kettenlinien, so ist

$$CA^2 - AS^2 = DB^2 - SB^2$$

= dem Quadrate des Parameters der Kettenlinie ASB (§. 290. *b.*), und eben so

$$CA^2 - AS'^2 = DB^2 - S'B^2;$$

folglich $(SB+AS)(SB-AS)=(S'B+AS')(S'B-AS')$.

Legt man nun durch die tiefere der beiden Rollen, welche A sey, eine Horizontale, die den Kettenlinien ASB und $AS'B$ in U und U' begegne, so ist der Bogen $AS = SU$ und $AS' = S'U'$. Hiermit wird die letzterhaltene Gleichung:

$$ASB \,.\, UB = AS'B \,.\, U'B,$$

d. h.: *Wird ein in sich selbst zurücklaufender Faden über zwei unendlich kleine Rollen gehängt, so verhalten sich die zwei von ihm gebildeten Kettenlinien ihrer Länge nach umgekehrt, wie die Theile derselben, welche oberhalb der durch die tiefere der beiden Rollen gezogenen Horizontale liegen.*

c. So wie im Punkte (x, y) der Kettenlinie die Spannung $T = gy$ ist, so ist sie in irgend einem andern Punkte (x', y') der Linie, $= gy'$, und daher, wenn letztere Spannung T' genannt wird:

$$T' - T = g(y' - y),$$

eine Gleichung, welche auch unmittelbar durch Integration der Gleichung (8) in §. 283. hervorgeht, wenn man darin, wie es hier der Fall ist, $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$ setzt. Sie drückt den Satz aus, dass der Unterschied zwischen den Spannungen in zwei Punkten des die Kettenlinie bildenden Fadens dem Gewichte eines Theils desselben Fadens gleich ist, dessen Länge die Höhe des einen Punktes über den andern misst.

Dieser Satz lässt sich übrigens auch ohne Anwendung der bisher vorgetragenen Theorie durch folgende einfache Betrachtung darthun. — Seyen M und N (Fig. 80.) zwei Punkte einer Kettenlinie, M der tiefere, N der höhere, und L ein dritter Punkt, welcher mit M in einer Verticalen und mit N in einer Horizontalen liegt. Man befestige in M, N und L drei unendlich kleine Rollen und lege von L bis N einen geraden horizontalen Steg. Man führe hierauf den über N hinausgehenden Theil des Fadens über die Rolle N und den Steg NL bis L, und den über M hinaus sich erstreckenden Theil des Fadens unter der Rolle M weg in verticaler Richtung gleichfalls bis L und verknüpfe ihn über der in L angebrachten Rolle mit dem ersten Theile, so dass man einen über drei Rollen gelegten, in sich zurücklaufenden Faden erhält. Ist nun dieser Faden, sich selbst überlassen, in Ruhe, — denn eine continuirliche Bewegung desselben anzunehmen, streitet gegen die Unmöglichkeit einer solchen — so wird jeder seiner drei Theile noch die vorige Form

mungshalbmesser dem Quadrate der Spannung proportional ist.

Im Scheitel, wo $T = \tau$ ist, wird $\rho = 1 : h$, d. h. *der Krümmungshalbmesser im Scheitel ist dem Parameter gleich.*

§. 293.

Aufgabe. Ein gleichförmig schwerer Faden von gegebener Länge l wird mit seinen Enden an zwei gegebenen unbeweglichen Punkten M und N (Fig. 80.) befestigt. Die Elemente der von ihm gebildeten Kettenlinie zu bestimmen.

Auflösung. Die Linie ist in der durch M und N zu legenden Verticalebene enthalten. In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in dieser Ebene, von welchem die Directrix der Kettenlinie die Abscissenlinie, und der Punkt O der Directrix, welcher vertical unter dem Scheitel S liegt, der Anfangspunkt der Abscissen ist, in Bezug auf dieses System seyen x, y die Coordinaten von M, und $x + a$, $y + b$ die Coordinaten von N; sey ferner der Parameter der Kettenlinie $= 1 : h$, und der Bogen $SM = s$, also der Bogen $SN = s + l$, wo die Bögen s und l positiv zu nehmen sind, wenn es ihre Projectionen auf die Axe der x sind. Alsdann ist nach §. 290. *b.* für den Punkt M:

$$(a) \qquad \begin{cases} h(y+s) = e^{hx}, \\ h(y-s) = e^{-hx}; \end{cases}$$

und eben so für den Punkt N:

$$(b) \qquad \begin{cases} h(y+b+s+l) = e^{h(x+a)}, \\ h(y+b-s-l) = e^{-h(x+a)}. \end{cases}$$

Durch die gegebene gegenseitige Lage von M und N sind nun a und b gegeben; es sind nämlich die Co-

Axe der x, die Ordinaten von S und M, $=f$ und y, so ist $T-\tau=g(y-f)$. Es ist ferner, wenn der Bogen $SM=s$ gesetzt wird: $T^2=\tau^2+g^2s^2$. Die Elimination von T aus diesen zwei Gleichungen giebt:

$$(\tau+g(y-f))^2=\tau^2+g^2s^2,$$

oder einfacher, wenn man die horizontale Abscissenlinie so legt, dass $gf=\tau$ wird:

$$y^2=f^2+s^2.$$

Da nun, wie so eben und im vor. §. gezeigt worden, die zwei Gleichungen für T sich geradezu aus der Natur der Kettenlinie, ohne Anwendung der Rechnung des Unendlichen, herleiten lassen, so sind wir damit eben so einfach zu der zwischen y und s bestehenden Gleichung der Kettenlinie selbst gelangt. Dass dabei f der im Obigen durch $1:h$ ausgedrückte Parameter ist, bedarf keiner Erinnerung.

e. Auch die Fundamentalgleichung $hs=p$ (§. 288.) kann auf ganz elementare Weise hergeleitet werden. Da nämlich die Spannung T, welche mit der Axe der y den Winkel ψ macht, die Resultante der Spannung τ und der Kraft gs ist, wenn letztere beide nach den positiven Richtungen der Axen der x und der y wirkend angenommen werden, so hat man

$$T\sin\psi=\tau,\quad T\cos\psi=gs,$$

$$\text{folglich}\quad \operatorname{cotg}\psi=\frac{gs}{\tau},\ \text{d. i.}\ p=\frac{s}{f}=hs.$$

f. Nach der Gleichung (12) in §. 283, und weil $P=-g$, $\varphi=-\psi$ und $T\sin\psi=\tau$ ist, hat man:

$$r=\frac{T}{P\sin\varphi}=\frac{T^2}{g\tau}=\frac{T^2}{hx^2}.$$

Die Kettenlinie besitzt daher noch die merkwürdige Eigenschaft, *dass in jedem ihrer Punkte der Krüm-*

mungshalbmesser dem Quadrate der Spannung proportional ist.

Im Scheitel, wo $T = \tau$ ist, wird $r = 1 : h$, d. h. *der Krümmungshalbmesser im Scheitel ist dem Parameter gleich.*

§. 293.

Aufgabe. Ein gleichförmig schwerer Faden von gegebener Länge l wird mit seinen Enden an zwei gegebenen unbeweglichen Punkten M und N (Fig. 80.) befestigt. Die Elemente der von ihm gebildeten Kettenlinie zu bestimmen.

Auflösung. Die Linie ist in der durch M und N zu legenden Verticalebene enthalten. In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in dieser Ebene, von welchem die Directrix der Kettenlinie die Abscissenlinie, und der Punkt O der Directrix, welcher vertical unter dem Scheitel S liegt, der Anfangspunkt der Abscissen ist, in Bezug auf dieses System seyen x, y die Coordinaten von M, und $x + a$, $y + b$ die Coordinaten von N; sey ferner der Parameter der Kettenlinie $= 1 : h$, und der Bogen $SM = s$, also der Bogen $SN = s + l$, wo die Bögen s und l positiv zu nehmen sind, wenn es ihre Projectionen auf die Axe der x sind. Alsdann ist nach §. 290. *b.* für den Punkt M:

$$(a) \qquad \begin{cases} h(y+s) = e^{hx}, \\ h(y-s) = e^{-hx}; \end{cases}$$

und eben so für den Punkt N:

$$(b) \qquad \begin{cases} h(y+b+s+l) = e^{h(x+a)}, \\ h(y+b-s-l) = e^{-h(x+a)}. \end{cases}$$

Durch die gegebene gegenseitige Lage von M und N sind nun a und b gegeben; es sind nämlich die Co-

geradlinig bis zu Punkten ... $N_{,}$, N, N', N'',..., die in einer Verticalen liegen, fortgeführt, und wird hierauf der Punkt P in einer horizontalen Ebene näher an diese Verticale, etwa bis $M_{,}$ gerückt, so haben die Kettenlinien, zu welchen sich nunmehr die Fäden krümmen, einander gleiche Parameter und sind daher, in unendlicher Ausdehnung gedacht, einander gleich und ähnlich. Denn schneidet die Horizontalebene, in welcher P und M liegen, die Verticale in N, so ist für die verschiedenen Kettenlinien $a = MN$ und $s^2 - b^2 = PN_{,}^2 - NN_{,}^2 = PN^2 = PN'^2 - NN'^2 =$ etc.

Von allen diesen Kettenlinien liegen übrigens die Scheitel gleichfalls in einer Kettenlinie, welche M zum Scheitel und denselben Parameter, wie die vorigen, aber eine umgekehrte Lage hat, so dass M die höchste Stelle einnimmt. Hiervon kann man sich durch eine sehr einfache, von der Natur der Kettenlinie ganz unabhängige, Betrachtung überzeugen. Wird nämlich der Bogen $S_{,}TM$ einer Kettenlinie, von welcher $S_{,}$ der Scheitel ist, in seiner Ebene um den Mittelpunkt seiner Sehne $S_{,}M$ halb herumgedreht, bis er in die Lage $MSS_{,}$ kommt, so vertauschen $S_{,}$ und M ihre Stellen, und der Scheitel ist nunmehr in M. Beschreibt man folglich in der Ebene einer Kettenlinie $S_{,}TM$ mit demselben Parameter eine zweite, welche die umgekehrte Lage der erstern und irgend einen Punkt M der erstern zum Scheitel hat, so geht diese zweite durch den Scheitel $S_{,}$ der erstern.

§. 295.

Bei der im Obigen entwickelten allgemeinen Theorie des Gleichgewichts eines Fadens wurde in §. 284. noch der Fall in Betracht gezogen, wenn der Faden

Siebentes Kapitel.

Analogie zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines Punktes.

§. 296.

Es dürfte gewiss schon von Manchem bemerkt worden seyn, dass zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines materiellen Punktes in mehrfacher Beziehung Aehnlichkeit statt findet; dass z. B. eben so, wie ein Faden, auf den nur an seinen Enden Kräfte wirken, sich geradlinig ausdehnt, auch ein Punkt, auf den nur ein anfänglicher Stoss wirkt, geradlinig fortgeht; dass auf gleiche Art, wie ein über eine krumme Fläche gespannter Faden die kürzeste Linie bildet, die sich auf der Fläche von einem Punkte zum andern ziehen lässt, auch ein auf einer Fläche durch einen Stoss in Bewegung gesetzter Punkt die kürzeste Linie bei seiner Bewegung wählt, und dass, wie dort die Spannung, so hier die Geschwindigkeit von einem Punkte zum andern constant ist; u. s. w. Gleichwohl erinnere ich mich nicht, eine Vergleichung dieser Theorieen des Gleichgewichts und der Bewegung irgendwo angestellt gefunden zu haben. Da indessen eine solche Vergleichung nicht nur an sich interessant ist, sondern auch die eine Theorie durch die andere, und namentlich die des Gleichgewichts durch die der Bewegung, mir Gewinn zu ziehen scheint, so will ich in diesem Kapitel den zwischen beiden Theorieen obwaltenden Zusammenhang

gleichförmig schwerer Faden mit seinen Enden an zwei Punkten der Ebene befestigt, so ist die von ihm auf der Ebene gebildete Curve dieselbe Kettenlinie, welche er annimmt, wenn die Ebene durch Drehung um eine in ihr enthaltene Horizontale in eine verticale Lage gebracht, und damit ihre Einwirkung auf den Faden aufgehoben wird.

Durch Drehung der Ebene um eine in ihr gezogene horizontale Axe wird also die Fadencurve nicht geändert, was auch schon daraus einleuchtet, dass in jedem Augenblicke der Drehung auf gleiche Elemente *ds* des Fadens gleiche und auf der Drehungsaxe normale Kräfte $-g\cos\alpha . ds$ in der Ebene wirken. Aus demselben Grunde erhellet, dass bei jeder durch die Drehung hervorgebrachten Neigung der Ebene die (bei der verticalen Lage durch *gy* bestimmten) Spannungen in den verschiedenen Punkten des Fadens in den nämlichen Verhältnissen zu einander stehen, dass aber die Spannung in einem und demselben Punkte von einer Neigung zur andern dem Sinus der Neigung gegen den Horizont $(90° - \alpha)$ proportional ist, und daher bei horizontaler Lage ganz verschwindet.

Endlich bemerke man noch, dass zufolge der dritten Gleichung die schiefe Ebene von jedem Curvenelemente *ds* einen auf ihr normalen Druck = dem Gewichte *gds* des Elements, multiplicirt in den Cosinus der Neigung, erleidet.

Siebentes Kapitel.

Analogie zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines Punktes.

§. 296.

Es dürfte gewiss schon von Manchem bemerkt worden seyn, dass zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines materiellen Punktes in mehrfacher Beziehung Aehnlichkeit statt findet; dass z. B. eben so, wie ein Faden, auf den nur an seinen Enden Kräfte wirken, sich geradlinig ausdehnt, auch ein Punkt, auf den nur ein anfänglicher Stoss wirkt, geradlinig fortgeht; dass auf gleiche Art, wie ein über eine krumme Fläche gespannter Faden die kürzeste Linie bildet, die sich auf der Fläche von einem Punkte zum andern ziehen lässt, auch ein auf einer Fläche durch einen Stoss in Bewegung gesetzter Punkt die kürzeste Linie bei seiner Bewegung wählt, und dass, wie dort die Spannung, so hier die Geschwindigkeit von einem Punkte zum andern constant ist; u. s. w. Gleichwohl erinnere ich mich nicht, eine Vergleichung dieser Theorieen des Gleichgewichts und der Bewegung irgendwo angestellt gefunden zu haben. Da indessen eine solche Vergleichung nicht nur an sich interessant ist, sondern auch die eine Theorie durch die andere, und namentlich die des Gleichgewichts durch die der Bewegung, mir Gewinn zu ziehen scheint, so will ich in diesem Kapitel den zwischen beiden Theorieen obwaltenden Zusammenhang

proportionalen beschleunigenden Kraft getrieben, so beschreibt er eine verticale Kettenlinie, deren Scheitel ihr tiefster Punkt ist. Dabei ist die Geschwindigkeit des Körpers der Spannung der Kette, also der Secante des Winkels proportional, den eine die Curve Berührende mit dem Horizonte macht (§. 287.).

Weil übrigens im Scheitel $T = g : h$ ist (§. 291.), wo g die jetzt constante Kraft P ausdrückt, so ist im Scheitel der durch Bewegung erzeugten Kettenlinie: $v = Q : vh$, folglich $v^2 : Q = 1 : h$, d. h. *das Quadrat der Geschwindigkeit im Scheitel, dividirt durch die beschleunigende Kraft daselbst, giebt den Parameter der Kettenlinie.*

Sehr leicht kann man sich von diesen Resultaten auch durch unmittelbare Rechnung überzeugen. Man hat nämlich für die vorausgesetzte Kraft, wenn man ihre Richtung mit der Axe der y parallel annimmt, die Gründgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = av = \frac{ads}{dt};$$

folglich, wenn man integrirt:

$$\frac{dx}{dt} = b, \quad \frac{dy}{dt} = as + c, \text{ und daher } v = \frac{bds}{dx},$$

woraus die Proportionalität der Geschwindigkeit mit der Secante der Neigung der Berührenden fliesst. Setzt man ferner $c = 0$, rechnet also den Bogen s von dem Punkte an, in welchem $dy = 0$, mithin die Berührende horizontal ist, so kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{as}{b}.$$

Dieses ist aber die Differentialgleichung einer Kettenlinie, deren Parameter $= b : a$, und deren Scheitel ihr tiefster Punkt ist (§. 288.). Weil daselbst $dy = 0$,

und daher $ds = dx$, also $v = b$, so ist im Scheitel $Q = a\frac{ds}{dt} = ab$, mithin $v^2 : Q = b : a =$ dem Parameter, — gleichfalls übereinstimmend mit dem Obigen.

§. 299.

Auf eben die Art, wie man vom Gleichgewichte eines Fadens zur Bewegung eines Körpers übergehen kann, lässt sich auch immer aus irgend einer krummlinigen Bewegung eines Körpers auf das Gleichgewicht eines eben so gekrümmten Fadens schliessen. Denn so wie in §. 297. aus dem Gleichgewichte der auf den Punkt A (Fig. 83.) nach den Richtungen $AA_,$, AB und AA' wirkenden Kräfte $T_,$, $P.AA'$ und T gefolgert wurde, dass ein Körper, der sich nach $A_,A$ mit einer Geschwindigkeit $v_, = cT_,$ bewegt, und dem in A nach der Richtung BA eine Geschwindigkeit $Qdt = cP.AA'$ mitgetheilt wird, nach AA' mit einer Geschwindigkeit $v = cT$ fortgeht, wo c eine Constante und dt das Zeitelement bezeichnet, in welchem der Körper das Raumelement AA' $(= vdt)$ zurücklegt: so kann auch umgekehrt daraus, dass v die Resultante der Geschwindigkeiten $v_,$ und Qdt ist, auf das Gleichgewicht zwischen $T_,$, $P.AA'$ und T geschlossen werden. So wie ferner die Bewegung eines Körpers durch ihre anfängliche Richtung und Geschwindigkeit und durch die beschleunigende Kraft vollkommen bestimmt ist, so ist es auch die Gestalt eines Fadens und die Spannung in jedem Punkte desselben, wenn für eines seiner Elemente die Lage und die Spannung desselben, für alle aber die auf sie wirkenden Kräfte gegeben sind. Hiernach lässt sich der in §. 297. erhaltene Satz folgendergestalt umkehren:

§. 300.

Wenn in dem Bisherigen die auf das Element des Fadens ds wirkende Kraft $= Pds$ gesetzt wurde, und wenn, wie es gewöhnlich ist, unter P die Gesammtwirkung auf eine Masse $= 1$ verstanden wird (§. 286.), so hat man sich die Masse des Fadens seiner Länge nach gleichförmig vertheilt zu denken, so dass Theile von gleicher Länge auch der Masse nach einander gleich sind. Ist aber die Masse ungleichförmig vertheilt, so ist, bei gleicher Bedeutung von P, die auf das Element ds wirkende Kraft $= P\varrho ds$ zu setzen, wo ϱds die Masse des Elements ausdrückt (ebendas.).

Mit Anwendung eines solchen Fadens von ungleichförmig vertheilter Masse lässt sich der im vor. §. von der Bewegung auf das Gleichgewicht gemachte Schluss auf eine etwas andere Weise bilden. Denn weil jetzt $P\varrho ds$ mit Qdt in constantem Verhältnisse seyn muss (vor. §.), so können wir geradezu P mit Q proportional setzen, wenn wir noch ϱds mit dt, d. h. die Masse des Fadenelements mit dem Zeitelemente, also überhaupt die Masse jedes Theils des Fadens mit der Zeit, in welcher dieser Theil vom Körper beschrieben worden, proportional annehmen, und wir erhalten damit den Satz:

Aus jeder Bewegung eines durch eine beschleunigende Kraft getriebenen Körpers kann man ein Gleichgewicht an einem Faden ableiten, indem man die vom Körper beschriebene Curve die Fadencurve seyn lässt, die Masse jedes Fadentheils der Zeit, in welcher er vom Körper durchlaufen wird, proportional annimmt und auf jeden Punkt des Fadens eine der den Körper daselbst beschleunigenden Kraft proportionale Kraft nach entgegengesetzter

Richtung wirken lässt. Dabei ist die Spannung des Fadens in constantem Verhältnisse mit der Geschwindigkeit des Körpers.

Wenn daher ein in zwei Punkten aufgehängter Faden die Gestalt einer verticalen mit ihrem Scheitel nach unten gekehrten Parabel hat, und, (weil bei der parabolischen Wurfbewegung die Zeiten sich wie die horizontalen Projectionen der durchlaufenen Bögen verhalten), *wenn das Gewicht jedes Fadentheils in constantem Verhältnisse zur horizontalen Projection des Theils steht, so ist der Faden unter der Einwirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte.*

Zu noch einem Beispiele mögen uns die um die Sonne laufenden Planeten dienen. Jeder Planet bewegt sich in einer Ellipse, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet; und diese Bewegung geht dergestalt vor sich, dass die von der Sonne bis zum Planet gezogene gerade Linie in gleichen Zeiten gleiche Flächen der Ellipse überstreicht. Hieraus folgerte Newton, dass die Sonne den Planet mit einer dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionalen Kraft anzieht, und wir können daher schliessen:

Hat ein in sich zurücklaufender Faden eine elliptische Form, und ist die Masse jedes seiner Theile der Fläche proportional, welche von dem Theile und den von seinen Endpunkten nach dem einen Brennpunkte der Ellipse gezogenen Geraden begränzt wird, und wirkt abwärts von demselben Brennpunkte auf jeden Punkt des Fadens eine Kraft, die sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Fadenpunktes vom Brennpunkte verhält, so herrscht Gleichgewicht. Dabei ist die Spannung des Fadens in jedem Punkte umgekehrt dem Perpendikel proportio-

einen gleichförmig dicken Faden, dessen Dichtigkeit in jedem Punkte sich umgekehrt wie die Quadratwurzel aus dem Abstande des Punktes von einer durch den Anfangspunkt der Bewegung gelegten horizontalen Ebene verhält *), so wird der Faden, nachdem zuvor sein oberster Punkt fest gemacht worden, unter Einwirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte seyn, und seine Spannung wird sich überall umgekehrt wie seine Dichtigkeit verhalten.

§. 302.

Der Zusammenhang zwischen dem Gleichgewichte eines Fadens und der Bewegung eines Körpers, dessen Grund wir im Vorigen durch geometrische Betrachtungen uns verdeutlichten, kann auch sehr einfach mit Hülfe der Analysis dargestellt werden.

Die Gleichungen für das Gleichgewicht eines Fadens, wenn auf jedes Element ds desselben die Kraft Pds oder (Xds, Yds, Zds) wirkt, und T die Spannung des Elements ist, sind nach §. 280.:

$$\int Xds + T\frac{dx}{ds} = 0,\ \int Yds + T\frac{dy}{ds} = 0, \text{ etc.}$$

Dagegen sind die Gleichungen für die Bewegung eines Körpers, auf welchen die beschleunigende Kraft Q oder (X', Y', Z') wirkt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X', \text{ etc. oder } \frac{dx}{dt} = \int Y'dt, \text{ etc.}$$

*) Denn weil bei dieser Vergleichung dt proportional mit $\varrho\varepsilon ds$ gesetzt wird (vor. §.), und weil der Faden gleichförmig dick, also ε constant seyn soll, so wird ϱ oder die Dichtigkeit proportional mit $dt : ds$, d. i. umgekehrt mit der Geschwindigkeit.

$$\text{d. i. } -\int X'dt + v\frac{dx}{ds} = 0, \text{ etc.}$$

wenn v die Geschwindigkeit, $= ds : dt$, bezeichnet.

So wie daher beim Gleichgewichte eines Fadens die stets nach der Tangente der Fadencurve gerichtete Spannung, wenn man sie nach den drei Coordinatenaxen zerlegt, durch die Integrale $-\int Xds$, $-\int Yds$, $-\int Zds$ ausgedrückt wird, so führt bei der Bewegung eines Körpers die Zerlegung der Geschwindigkeit, welche ihrer Natur nach die tangentiale Richtung der vom Körper beschriebenen Curve hat, zu den drei Integralen: $\int X'dt$, etc. Ist folglich die Fadencurve einerlei mit der vom Körper beschriebenen, so ist für einen und denselben Punkt der Curve und bei gehöriger Bestimmung der durch die Integration hinzukommenden Constanten:

$$\frac{\int Xds}{\int X'dt} = \frac{\int Yds}{\int Y'dt} = \frac{\int Zds}{\int Z'dt} = -\frac{T}{v}.$$

Setzen wir daher noch für jeden Punkt die Geschwindigkeit auf der einen der Spannung auf der andern Seite proportional, also $v = cT$, so wird auch $\int X'dt = -c\int Xds$, etc., folglich $X'dt = -cXds$, etc. d. i. $X' = -cXv$, etc. Die Richtungen von (X, Y, Z) und (X', Y', Z'), d. i. von P und Q, fallen mithin in dieselbe Gerade, und es ist $Q = -cPv$, also $Q : v$ mit P, und Pv oder PT mit Q proportional. Endlich erhält man durch Elimination von c aus den Gleichungen $v = cT$ und $Q = -cPv$ die Proportion:

$$Q : v^2 = -P : T.$$

Eben so lässt sich analytisch auch der Fall behandeln, wenn die Beweglichkeit des Fadens und die des Körpers auf eine Fläche beschränkt sind, was ich

aber weiter zu erörtern für überflüssig halte, da der hier zu nehmende Gang dem vorigen ganz ähnlich ist.

§. 303.

In Bezug auf die Bewegung eines Systems von Körpern giebt es in der Dynamik einige Sätze, die unmittelbar aus den allgemeinen Gleichungen der Bewegung folgen und unter den Namen des Princips der Flächen, des Princips der lebendigen Kräfte und des Princips der kleinsten Wirkung bekannt sind. Diese Sätze können, wenn es sich nur um eines Körpers Bewegung handelt, folgendergestalt ausgesprochen werden:

I. Ist die einen Körper beschleunigende Kraft nach einem unbeweglichen Punkte oder Centrum gerichtet, so bewegt sich der Körper in einer das Centrum enthaltenden Ebene, und die vom Centrum bis zum Körper gezogene Gerade beschreibt der Zeit proportionale Flächen, oder, was auf dasselbe hinauskömmt: die Geschwindigkeit verhält sich in jedem Punkte der Bahn umgekehrt wie das Perpendikel, welches vom Centrum auf die durch den Punkt an die Bahn gelegte Tangente gefällt wird.

II. Ist (X, Y, Z) die beschleunigende Kraft im Punkte (x, y, z), und $Xdx + Ydy + Zdz$, d. h. das Product aus dem Elemente der Bahn in die nach der Richtung des Elements geschätzte beschleunigende Kraft, ein vollständiges Differential, so kann mit Hülfe des Integrals davon, und wenn man zwei Punkte der Bahn kennt, die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten in diesen Punkten, ohne weitere Kenntniss der Bahn selbst, angegeben werden.

III. Unter derselben Bedingung, dass $Xdx + \ldots$

ein vollständiges Differential ist, ist das Integral des Productes aus dem Quadrate der Geschwindigkeit in das Differential der Zeit, oder, was dasselbe ausdrückt, das Integral des Productes aus der Geschwindigkeit in das Differential des Weges, für den wirklich vom Körper beschriebenen Weg ein Minimum.

Letztere zwei Sätze gelten übrigens auch dann, wenn die Bewegung des Körpers auf eine unbewegliche Fläche beschränkt ist.

Zufolge des Zusammenhanges, den wir jetzt zwischen der Bewegung eines Körpers und dem Gleichgewichte eines Fadens kennen gelernt haben, müssen nun analoge Sätze aus den allgemeinen Gleichungen für das Fadengleichgewicht hergeleitet werden können.

§. 304.

Die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines frei beweglichen Fadens sind nach §. 282. (2*):

$$\begin{aligned} X ds + T d\xi + \xi dT &= 0, \\ Y ds + T d\eta + \eta dT &= 0, \\ Z ds + T d\zeta + \zeta dT &= 0, \end{aligned}$$

wo ξ, η, ζ die ebendaselbst angegebene Bedeutung haben.

Lassen wir nun zuerst die Kräfte (X, Y, Z) nach einem und demselben Punkte O, etwa nach dem Anfangspunkte der Coordinaten, gerichtet seyn und setzen daher $X : Y : Z = x : y : z$, mithin

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad xY - yX = 0,$$

so kommt, wenn wir in diesen drei Gleichungen für X, Y, Z ihre Werthe aus den vorhergehenden substituiren:

$$T(y d\zeta - z d\eta) + (y\zeta - z\eta) dT = 0,$$

und M_2, so wie in jedem andern Punkte, den die Curve l mit der des Fadens zufällig gemein hat, für beide Curven gleich gross seyn werden, berechne man für die Curve l von M_1 bis M_2 das Integral $\int T ds$, so wird dieses, wenn die Curve die des im Gleichgewichte befindlichen Fadens selbst ist, seinen grössten oder kleinsten Werth haben.

Der Beweis hiervon ist eben so, wie der des entsprechenden Satzes III., durch Variationsrechnung zu führen. Man lässt nämlich die willkührlich von M_1 bis M_2 gezogene Curve l, ohne dass diese zwei Punkte ihre Grenzen zu seyn aufhören, sich um ein unendlich Weniges ändern und zeigt nun, dass die dadurch entstehende Aenderung $\delta \int T ds$ des Integrals dann $= 0$ ist, wenn diese Curve mit der des Fadens zusammenfällt. Die Rechnung steht also. — Zuerst ist:

$$(b) \quad \delta \int T ds = \int \delta . T ds,$$

$$\text{und } \delta . T ds = \delta T . ds + T \delta ds.$$

Wegen (a) aber hat man:

$$\delta T = -\delta V = -\frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y - \frac{dV}{dz}\delta z,$$

$$\text{und weil } \frac{dV}{dx} = X, \text{ etc. ist:}$$

$$\delta T = -X\delta x - Y\delta y - Z\delta z.$$

Ferner ist $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, und daher $ds\delta ds = dx\delta dx + \ldots$,

$$\text{d. i. } \delta ds = \xi \delta dx + \eta \delta dy + \zeta \delta dz \ (\S.\ 282.)$$
$$= \xi d\delta x + \ldots$$

Hiermit wird

$$(c) \quad \delta . T ds = -X ds \delta x - \ldots + T\xi d\delta x + \ldots$$

Ist nun die zu variirende Curve die Fadencurve, so ist $X ds = -d(T\xi)$, etc. und daher in diesem Falle

$$(d)\quad \delta . Tds = d(T\xi)\delta x + \ldots + T\xi d\delta x + \ldots,$$
$$= d(T\xi\delta x) + \ldots .$$

Hieraus folgt nach (*b*) durch Integration:

$$\delta \int Tds = T\xi\delta x + T\eta\delta y + T\zeta\delta z + \text{Const.}$$

l wenn man das Integral von M_1 bis M_2 erstreckt l die Werthe von $T\xi$, $T\eta$, $T\zeta$ in M_1 und M_2 resp. ch A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 bezeichnet:

$$\int Tdx = A_2\delta x_2 - A_1\delta x_1 + \ldots + C_2\delta z_2 - C_1\delta z_1.$$

Dieses Aggregat ist aber $= 0$, weil die Punkte und M_2 unveränderlich seyn sollen und daher δx_1 $_2$, $\delta y_1, \ldots = 0$ sind. *Mithin ist das Integral* $\int Tds$, *nn die Grenzen desselben zwei bestimmte Punkte r Fadencurve sind, und wenn die Curve, auf wel- e es bezogen wird, die Fadencurve selbst ist, ein aximum oder Minimum.*

§. 306.

Eben so, wie das Princip der lebendigen Kräfte d das Princip der kleinsten Wirkung nicht bloss für ien sich frei bewegenden Körper gelten, sondern auch nn noch Anwendung leiden, wenn die Bewegung des örpers auf eine gegebene Fläche beschränkt ist, so halten die im vor. §. bewiesenen, jenen Principen alogen Sätze auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn r Faden über eine Fläche gespannt ist.

Für den ersten derselben geht dieses unmittelbar raus hervor, dass die Gleichung $Xdx + \ldots + dT = 0$, s welcher er gefolgert wurde, nach §. 285. auch bei iem auf einer Fläche beweglichen Faden statt findet.

Rücksichtlich des zweiten, das Maximum und Mimum von $\int Tds$ betreffenden Satzes ist zu bemerken, ss bei seiner Anwendung auf einen über eine Fläche spannten Faden die von einem Punkte A der Faden-

curve bis zu einem andern B derselben beliebig zu ziehenden Curven nur solche seyn dürfen, die in der Fläche selbst enthalten sind. Ist nun, wie in §. 284, $F=0$ die Gleichung der Fläche, sind u, v, w die partiellen Differenzen von F nach x, y, z, dividirt durch die Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate, und bezeichnet R den Druck der Fläche auf den Faden, so hat man gegenwärtig in der Gleichung (c) der vorigen §., wenn die zu variirende Curve die Fadencurve selbst seyn soll, $-Ruds - d(T\xi)$ für Xds, u. s. w. zu setzen (§. 284.). Hierdurch kommen in der Gleichung (d) rechter Hand noch die Glieder $Rds(u\delta x + v\delta y + w\delta z)$ hinzu, die sich aber gegenseitig aufheben, weil die Variation in der Fläche selbst geschehen soll, und folglich $u\delta x + v\delta y + w\delta z = 0$ ist (§. 285.). Die Gleichung (d) bleibt daher unverändert, und es wird mithin auch im jetzigen Falle $\delta \int Tds = 0$; d. h. unter allen Werthen, die das Integral $\int Tds$ für die verschiedenen auf der Fläche von A bis B zu ziehenden Curven erhält, ist der für die Fadencurve selbst der grösste oder kleinste.

Specielle Folgerungen aus diesen Sätzen sind, dass, wenn auf den über die Fläche gelegten Faden keine anderen Kräfte, als die Spannungen an beiden Enden wirken, die Spannung überall gleich gross und die Fadencurve die kürzeste Linie ist, die von dem einen Ende zum andern auf der Fläche gezogen werden kann. Denn alsdann sind X, Y, Z null, folglich T constant. Hiermit aber wird das Integral $\int Tds$ der Länge der von einem zum andern Ende gezogenen Curve selbst proportional.

§. 307.

Es dürfte nicht überflüssig seyn, uns noch den

Satz, welcher den grössten oder kleinsten Werth des Integrals von Tds betrifft, an einem Beispiele deutlich zu machen. Wir wählen hierzu die Kettenlinie, die uns bereits in §. 305. zur Erläuterung des Gesetzes von den Differenzen der Spannungen diente.

Beziehen wir eine in zwei Punkten A und B aufgehängte schwere Kette auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen Axe der y vertical nach oben gerichtet ist, und dessen horizontale Ebene der x, z die Directrix der von der Kette gebildeten Linie enthält, so ist in jedem Punkte (x, y, z) dieser Linie die Spannung T mit y, also Tds mit yds proportional. *Sind folglich eine horizontale Ebene*, als Ebene der x, z, *und zwei darüber liegende Punkte A und B gegeben, so ist es unter allen von A bis B zu ziehenden Curven die Kettenlinie, deren Directrix in die Ebene fällt, für welche* das Integral $\int yds$, von A bis B genommen, d. h. *das Product aus der Länge* $(\int ds)$ *der Curve in den Abstand* $\left(\frac{\int yds}{\int ds}\right)$ *ihres Schwerpunktes von der Ebene, seinen grössten oder kleinsten Werth hat.*

Dasselbe ergiebt sich auch, wie gehörig, durch Variation des Integrals von yds. Es ist nämlich

$$\delta \int yds = \int ds\delta y + \int y\,(\xi d\delta x + \eta d\delta y + \zeta d\delta z)$$
$$= \int ds\delta y + y\,(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z)$$
$$- \int [d(y\xi)\,\delta x + d(y\eta)\,\delta y + d(y\zeta)\,\delta z].$$

Soll mithin das Integral $\int yds$ ein Maximum oder Minimum seyn, so hat man nach den bekannten Regeln

(1).... $d(y\xi) = 0$, $d(y\eta) - ds = 0$, $d(y\zeta) = 0$

zu setzen. Hieraus fliesst durch Integration:

(2).... $ydx = ads$, $ydy = (b + s)ds$, $ydz = cds$,

folglich $adx = cdx$, welches, von Neuem integrirt,

aber weiter zu erörtern für überflüssig halte, da der hier zu nehmende Gang dem vorigen ganz ähnlich ist.

§. 303.

In Bezug auf die Bewegung eines Systems von Körpern giebt es in der Dynamik einige Sätze, die unmittelbar aus den allgemeinen Gleichungen der Bewegung folgen und unter den Namen des Princips der Flächen, des Princips der lebendigen Kräfte und des Princips der kleinsten Wirkung bekannt sind. Diese Sätze können, wenn es sich nur um eines Körpers Bewegung handelt, folgendergestalt ausgesprochen werden:

I. Ist die einen Körper beschleunigende Kraft nach einem unbeweglichen Punkte oder Centrum gerichtet, so bewegt sich der Körper in einer das Centrum enthaltenden Ebene, und die vom Centrum bis zum Körper gezogene Gerade beschreibt der Zeit proportionale Flächen, oder, was auf dasselbe hinauskömmt: die Geschwindigkeit verhält sich in jedem Punkte der Bahn umgekehrt wie das Perpendikel, welches vom Centrum auf die durch den Punkt an die Bahn gelegte Tangente gefällt wird.

II. Ist (X, Y, Z) die beschleunigende Kraft im Punkte (x, y, z), und $Xdx + Ydy + Zdz$, d. h. das Product aus dem Elemente der Bahn in die nach der Richtung des Elements geschätzte beschleunigende Kraft, ein vollständiges Differential, so kann mit Hülfe des Integrals davon, und wenn man zwei Punkte der Bahn kennt, die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten in diesen Punkten, ohne weitere Kenntniss der Bahn selbst, angegeben werden.

III. Unter derselben Bedingung, dass $Xdx + \ldots$

ein vollständiges Differential ist, ist das Integral des Productes aus dem Quadrate der Geschwindigkeit in das Differential der Zeit, oder, was dasselbe ausdrückt, das Integral des Productes aus der Geschwindigkeit in das Differential des Weges, für den wirklich vom Körper beschriebenen Weg ein Minimum.

Letztere zwei Sätze gelten übrigens auch dann, wenn die Bewegung des Körpers auf eine unbewegliche Fläche beschränkt ist.

Zufolge des Zusammenhanges, den wir jetzt zwischen der Bewegung eines Körpers und dem Gleichgewichte eines Fadens kennen gelernt haben, müssen nun analoge Sätze aus den allgemeinen Gleichungen für das Fadengleichgewicht hergeleitet werden können.

§. 304.

Die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines frei beweglichen Fadens sind nach §. 282. (2*):

$$\begin{aligned} X ds + T d\xi + \xi dT &= 0, \\ Y ds + T d\eta + \eta dT &= 0, \\ Z ds + T d\zeta + \zeta dT &= 0, \end{aligned}$$

wo ξ, η, ζ die ebendaselbst angegebene Bedeutung haben.

Lassen wir nun zuerst die Kräfte (X, Y, Z) nach einem und demselben Punkte O, etwa nach dem Anfangspunkte der Coordinaten, gerichtet seyn und setzen daher $X : Y : Z = x : y : z$, mithin

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad xY - yX = 0,$$

so kommt, wenn wir in diesen drei Gleichungen für X, Y, Z ihre Werthe aus den vorhergehenden substituiren:

$$T(yd\zeta - zd\eta) + (y\zeta - z\eta)dT = 0,$$

den Integrationen die Constanten für einen vom Scheitel anfangenden Bogen s bestimmen:

$$sx_1 = \int x ds = sx - \int s dx = sx - fy + f^2,$$
$$sy_1 = \int y ds = \tfrac{1}{2}(sy + fx).$$

Hiermit kann aber nach §. 111. auch jedes andern Bogens Schwerpunkt ohne Mühe gefunden werden.

§. 308.

Die Lösung der Aufgabe, von einem gegebenen Punkte A (Fig. 84.) bis zu einem andern gegebenen B eine Curve zu ziehen, für welche in Bezug auf eine gegebene, mit A und B in einer Ebene liegende Gerade CD, als Axe der x, das Integral $\int y ds$ ein Maximum oder Minimum ist, kommt nach vor. §. auf die Construction einer Kettenlinie hinaus, welche durch A und B geht und CD zur Directrix hat. Am leichtesten lässt sich diese Construction in dem besonderen Falle ausführen, wenn A und B gleichweit von CD entfernt sind.

Man denke sich zu dem Ende die Kettenlinie in ihrer natürlichen Lage, also die Ebene $ABCD$ vertical, und die Gerade CD, so wie auch AB, horizontal, und letztere Gerade oberhalb der erstern. Durch den Mittelpunkt E der AB lege man eine Verticale, welche CD in F treffe und den Scheitel der zu construirenden Kettenlinie enthalten wird.

Man beschreibe nun mit einem Parameter von beliebiger Grösse und zu einer willkührlich gezogenen Horizontalen OX, als Directrix, eine Kettenlinie SN. S sey der Scheitel derselben, und O der unter S liegende Punkt der Directrix, also OS der Parameter. Von O ziehe man eine Tangente an die Kettenlinie, und N sey der Berührungspunkt. Man ziehe ferner FA und lege durch O auf derselben Seite von OS, auf

welcher N liegt, eine Gerade OP, welche mit OS einen Winkel $= EFA$ mache.

Ist nun erstens dieser Winkel kleiner als SON, so wird OP die Kettenlinie in zwei Punkten schneiden, von denen der eine M_1 zwischen S und N, der andere M_2 ausserhalb SN auf der Seite von N liegt. Man trage alsdann von F nach E zu eine Linie FS_1, die sich zu FA, wie OS zu OM_1, verhält, und ziehe von S_1 bis A eine dem Bogen SM_1 ähnliche Curve. Hiernach sind die mit Bögen begrenzten Winkel SOM_1 und S_1FA einander ähnliche Figuren, und weil SM_1 der Bogen einer Kettenlinie ist, welche S zum Scheitel und OS zum Parameter hat, so wird auch S_1A der Bogen einer Kettenlinie, S_1 der Scheitel derselben und FS_1 ihr Parameter seyn. Dass dieser Bogen, über S_1 hinaus verlängert, durch B gehen wird, ist von selbst klar. Auf gleiche Weise erhellet, dass, wenn man auf FE von F nach S_2 die vierte Proportionallinie zu OM_2, OS, und FA trägt, auch die durch S_2, als Scheitel, und mit FS_2, als Parameter, zu beschreibende Kettenlinie den Punkten A und B begegnen wird. Es giebt demnach im gegenwärtigen Falle zwei Kettenlinien, welche durch A und B gehen und CD zur Directrix haben.

Ist zweitens der Winkel EFA dem SON gleich, so fällt die Gerade OP mit der Tangente, also die Punkte M_1 und M_2 mit N, zusammen, und es giebt nur eine die Bedingung der Aufgabe erfüllende Kettenlinie, deren Parameter die vierte Proportionale zu ON, OS und FA ist.

Findet sich aber drittens EFA grösser als SON, so wird die Kettenlinie SN von OP in keinem Punkte getroffen, und die Lösung der Aufgabe ist unmöglich.

$$(3) \quad ax = cx + c'$$

giebt. Addirt man ferner die Quadrate der 3 Gleichungen (2)', so kommt die endliche Gleichung

$$y^2 = a^2 + (b+s)^2 + c^2,$$

oder einfacher, wenn man $a^2 + b^2 + c^2 = f^2$ setzt und den Bogen s von dem Punkte an rechnet, in welchem die Tangente horizontal, also $dy : ds = 0$ ist:

$$(4) \quad y^2 = f^2 + s^2.$$

Man multiplicire noch die 3 Gleichungen (1) resp. mit ξ, η, ζ und addire sie, so findet sich, weil $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ und $\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0$ ist:

$$dy = \eta ds,$$

d. i. eine identische Gleichung. Von den 3 Gleichungen (1) ist daher jede eine Folge der beiden übrigen, und es können mithin irgend zwei von einander unabhängige aus (1) fliessende Gleichungen die Stelle dieser drei vertreten und als das Resultat der Rechnung angesehen werden. Man wähle nun (3) und (4) zu solchen zwei Gleichungen. Die erstere derselben giebt zu erkennen, dass die gesuchte Curve in einer auf der Ebene der x, z normalen, also in einer verticalen, Ebene enthalten seyn muss. Hiermit in Verbindung zeigt die letztere Gleichung (4) an, dass die Curve eine Kettenlinie ist, deren Directrix in der horizontalen Ebene der x, z liegt (§. 290. *b.*).

Man gewahrt leicht, wie aus der hiermit bewiesenen Eigenschaft der Kettenlinie der bekannte Satz, dass der Schwerpunkt einer mit ihren Endpunkten befestigten Kette am tiefsten liegt, wenn sie, frei hängend, im Gleichgewichte ist, als specielle Folgerung hergeleitet werden kann. Denn für dieselbe Curve, für welche unter allen von A bis B gezogenen Curven das Integral $\int y ds$ ein Maximum oder Minimum ist, muss

tenlinie geführt werden soll, nicht in einer Horizontalen liegen, wollen wir nur noch die Maxima und Minima näher betrachten, welche die so eben construirten zwei Kettenlinien unter der einfachen Annahme darstellen, dass alle von A bis B zu ziehenden Curven gleichfalls Kettenlinien in ihrer natürlichen Lage sind, d. h. Kettenlinien, deren Scheitel sämmtlich in der Verticalen EF, und in deren Verlängerung über F hinaus, liegen.

Tritt nun, dieses vorausgesetzt, der erste jener drei Fälle ein, und können daher von A bis B zwei verschiedene Kettenlinien AS_1B und AS_2B gezogen werden, welche CD zur Directrix haben, so wird unter allen von A bis B möglichen Kettenlinien die eine jener beiden es seyn, für welche das Integral $\int yds$ ein Maximum, und die andere, für welche es ein Minimum ist, indem sonst, wenn für jede von beiden Linien das Integral ein Maximum (Minimum) wäre, zwischen S_1 und S_2 noch der Scheitel einer dritten Kettenlinie liegen müsste, für welche das Integral einen kleinsten (grössten) Werth hätte, also einer dritten, deren Directrix gleichfalls CD wäre; diese dritte ist aber nicht möglich, weil die Gerade OP die Kettenlinie SN in nicht mehr, als zwei Punkten, schneiden kann.

Es ist ferner leicht einzusehen, dass jenes Integral, oder das ihm gleiche Product aus der Länge der Kettenlinie in den Abstand ihres Schwerpunktes von CD, für die tiefer hängende Kettenlinie AS_2B ein Maximum, und mithin für die höhere AS_1B ein Minimum ist. Denn je tiefer der Scheitel einer von A bis B gehenden Kettenlinie liegt, desto tiefer, und dieses ohne angebbare Grenze, liegt offenbar auch der Schwerpunkt derselben. Bei einem genugsam tief unter CD liegenden Scheitel S wird daher der Schwerpunkt in CD

selbst fallen, und mithin jenes Product $= 0$ seyn. Lässt man nun diese Kettenlinie in Gedanken immer kürzer werden, so steigen ihr Scheitel S und ihr Schwerpunkt, letzterer von CD an, in die Höhe; das Product muss folglich positiv werden, also wachsen, und, wenn S bis S_2 gekommen ist, seinen grössten Werth erreichen. — Steigt S noch höher, so nimmt das Product wieder ab, wird, wenn S mit S_1 zusammenfällt, ein Minimum, und wächst daher von Neuem, wenn S von S_1 bis E zu steigen fortfährt.

Fallen S_1 und S_2 zusammen, und giebt es mithin nur eine durch A und B zu legende Kettenlinie, welche von CD um ihren Parameter absteht, so folgt auf die Zunahme des Products, wenn der Scheitel S von F bis S_2 rückt, unmittelbar die weitere Zunahme bei der Bewegung des Scheitels von S_1 bis E, und das Maximum und Minimum fallen daher weg.

Auf gleiche Art endlich wächst das Product fortwährend, wenn A und B der CD so nahe liegen, dass auch jene eine Kettenlinie nicht mehr construirt werden kann.

Achtes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an elastischen Fäden.

§. 310.

Wie gleich am Anfange dieses Werkes erinnert worden, giebt es in der Natur keinen Körper, dessen Theilchen vollkommen fest mit einander verbunden wä-

welcher N liegt, eine Gerade OP, welche mit OS einen Winkel $= EFA$ mache.

Ist nun erstens dieser Winkel kleiner als SON, so wird OP die Kettenlinie in zwei Punkten schneiden, von denen der eine M_1 zwischen S und N, der andere M_2 ausserhalb SN auf der Seite von N liegt. Man trage alsdann von F nach E zu eine Linie FS_1, die sich zu FA, wie OS zu OM_1, verhält, und ziehe von S_1 bis A eine dem Bogen SM_1 ähnliche Curve. Hiernach sind die mit Bögen begrenzten Winkel SOM_1 und S_1FA einander ähnliche Figuren, und weil SM_1 der Bogen einer Kettenlinie ist, welche S zum Scheitel und OS zum Parameter hat, so wird auch S_1A der Bogen einer Kettenlinie, S_1 der Scheitel derselben und FS_1 ihr Parameter seyn. Dass dieser Bogen, über S_1 hinaus verlängert, durch B gehen wird, ist von selbst klar. Auf gleiche Weise erhellet, dass, wenn man auf FE von F nach S_2 die vierte Proportionallinie zu OM_2, OS, und FA trägt, auch die durch S_2, als Scheitel, und mit FS_2, als Parameter, zu beschreibende Kettenlinie den Punkten A und B begegnen wird. Es giebt demnach im gegenwärtigen Falle zwei Kettenlinien, welche durch A und B gehen und CD zur Directrix haben.

Ist zweitens der Winkel EFA dem SON gleich, so fällt die Gerade OP mit der Tangente, also die Punkte M_1 und M_2 mit N, zusammen, und es giebt nur eine die Bedingung der Aufgabe erfüllende Kettenlinie, deren Parameter die vierte Proportionale zu ON, OS und FA ist.

Findet sich aber drittens EFA grösser als SON, so wird die Kettenlinie SN von OP in keinem Punkte getroffen, und die Lösung der Aufgabe ist unmöglich.

Die Richtigkeit dieser Schlüsse beruht darauf, dass die Kettenlinie zu den Curven gehört, welche nur einen Parameter haben, und dass daher alle Kettenlinien einander ähnlich sind. Eben deswegen muss auch der Winkel SON, auf welchen es hier besonders ankommt, einen für alle Kettenlinien constanten Werth haben. Um ihn numerisch zu bestimmen, erinnere man sich, dass p oder die trigonometrische Tangente des Winkels, den eine an den Endpunkt (x, y) des Bogens s gelegte Berührende mit der Axe der x macht, $= hs$ ist (§. 288.). Geht diese Berührende zugleich durch den Anfangspunkt O der Coordinaten, wie ON, so ist auch $p = y : x$, und man hat daher für den Punkt N die Gleichung: $y = hxs$, oder wenn man y und s durch x ausdrückt (§. 289. und §. 290. *b.*):

$$e^{hx} + e^{-hx} = hx(e^{hx} - e^{-hx}),$$

und wenn man $hx = u$ setzt:

$$(u+1)e^{-u} = (u-1)e^{u},$$

$$\text{oder } \log(u+1) - \log(u-1) = 2u.$$

Hieraus aber findet sich .... $u = 1{,}19969$,

$$tang\, XON = hs = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2} = 1{,}5088 = \text{tang}\, 56^{\circ}\, 28',$$

also $SON = 33^{\circ}\, 32'$. Man kann daher durch A und B entweder zwei, oder nur eine, oder keine Kettenlinie legen, welche CD zur Directrix hat, nachdem der Winkel $EFA <$, $=$ oder $> 33^{\circ}\, 32'$, oder, was dasselbe ausdrückt, jenachdem FE, d. i. der Abstand der Horizontalen AB von der Directrix, $>$, $=$ oder $<$ $0{,}7544\, AB$ $(= \frac{1}{2} . 1{,}5088\, AB)$ ist.

§. 309.

Ohne die Untersuchung auf den Fall auszudehnen, wenn die zwei Punkte A und B, durch welche die Ket-

wird, e eine positive Grösse ist. Alsdann müssen an A die Kräfte P und ex, und an B die Kräfte Q und $-ex$ einander das Gleichgewicht halten. Die Kräfte P und Q müssen folglich eben so, als wenn die gegenseitige Entfernung der Punkte unveränderlich wäre, einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Das Increment x aber findet sich $= -P:e = Q:e$, ist also desto grösser, je grösser die Kräfte P und Q sind, und ist entweder ein wirkliches Increment, oder eine Verkürzung der Linie AB, nachdem P negativ oder positiv ist, d. h. nachdem die Kräfte P und Q die Punkte A und B von einander zu entfernen, oder einander zu nähern streben.

Seyen ferner A, B, C drei in einer Geraden, B zwischen A und C, liegende Punkte, von denen je zwei elastisch mit einander verbunden sind. Auf sie wirken nach Richtungen, die mit derselben Geraden zusammenfallen, die sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte P, Q, R. Die dadurch bewirkten Incremente der Abstände AB, BC und AC seyen x, y und z, $= x+y$, weil die Punkte in der anfänglichen Geraden bleiben. Die diesen Incrementen proportionalen elastischen Kräfte setze man $= fx$, gy, hz, so dass auf A und B nach der Richtung AB die Kräfte fx und $-fx$ wirken, u. s. w. Hiernach hat man für das Gleichgewicht an A, B und C resp. die Gleichungen:

$$P+fx+hz=0,\quad Q-fx+gy=0,\quad R-gy-hz=0,$$

oder, weil $z=x+y$ ist:

$$P+(f+h)x+hy=0,\quad Q-fx+gy=0,\quad R-hx-(g+h)y=0.$$

Hieraus folgt zuerst die schon bekannte Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht des ganzen Systems:

$$P+Q+R=0,$$

selbst fallen, und mithin jenes Product $= 0$ seyn. Lässt man nun diese Kettenlinie in Gedanken immer kürzer werden, so steigen ihr Scheitel S und ihr Schwerpunkt, letzterer von CD an, in die Höhe; das Product muss folglich positiv werden, also wachsen, und, wenn S bis S_2 gekommen ist, seinen grössten Werth erreichen. — Steigt S noch höher, so nimmt das Product wieder ab, wird, wenn S mit S_1 zusammenfällt, ein Minimum, und wächst daher von Neuem, wenn S von S_1 bis E zu steigen fortfährt.

Fallen S_1 und S_2 zusammen, und giebt es mithin nur eine durch A und B zu legende Kettenlinie, welche von CD um ihren Parameter absteht, so folgt auf die Zunahme des Products, wenn der Scheitel S von F bis S_2 rückt, unmittelbar die weitere Zunahme bei der Bewegung des Scheitels von S_1 bis E, und das Maximum und Minimum fallen daher weg.

Auf gleiche Art endlich wächst das Product fortwährend, wenn A und B der CD so nahe liegen, dass auch jene eine Kettenlinie nicht mehr construirt werden kann.

Achtes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an elastischen Fäden.

§. 310.

Wie gleich am Anfange dieses Werkes erinnert worden, giebt es in der Natur keinen Körper, dessen Theilchen vollkommen fest mit einander verbunden wä-

gung des Gleichgewichts herleiten lassen, welche ausdrückt, dass die Summe der angebrachten Kräfte null ist. Die $n-1$ übrigen davon unabhängigen Gleichungen enthalten nächst jenen äussern Kräften noch die elastischen Kräfte und damit die den letztern proportionalen Aenderungen der Entfernungen der Punkte. Da nun bei einem Systeme von n Punkten in einer Geraden aus $n-1$ solchen Aenderungen, welche von einander unabhängig sind, alle übrigen gefunden werden können, so wird man mittelst jener $n-1$ Gleichungen alle in dem Systeme vorkommenden Aenderungen, und damit die elastischen Kräfte selbst oder die Pressungen berechnen können.

Sind die n Punkte und die auf sie wirkenden äusseren Kräfte in einer und derselben Ebene begriffen, so hat man für das Gleichgewicht jedes Punktes zwei Gleichungen, also zusammen $2n$ Gleichungen. Hieraus müssen sich nach Elimination der elastischen Kräfte die 3 bekannten Gleichungen für das Gleichgewicht eines Systems von Punkten in einer Ebene ergeben. Es bleiben daher $2n-3$ davon unabhängige Gleichungen übrig, welche die elastischen Kräfte, d. i. den Abstandsänderungen der Punkte proportionale Grössen enthalten. Mithin lassen sich auch hier alle diese Aenderungen und damit die elastischen Kräfte oder Pressungen bestimmen, da bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene die Anzahl der von einander unabhängigen Entfernungen, also auch ihrer Aenderungen, aus denen sich alle übrigen herleiten lassen, gleichfalls $= 2n-3$ ist.

Bei einem Systeme von Kräften, welche auf n Punkte im Raume wirken, hat man zunächst 3 Gleichungen für das Gleichgewicht jedes Punktes, also im

selbst fallen, und mithin jenes Product $= 0$ seyn. Lässt man nun diese Kettenlinie in Gedanken immer kürzer werden, so steigen ihr Scheitel S und ihr Schwerpunkt, letzterer von CD an, in die Höhe; das Product muss folglich positiv werden, also wachsen, und, wenn S bis S_2 gekommen ist, seinen grössten Werth erreichen. — Steigt S noch höher, so nimmt das Product wieder ab, wird, wenn S mit S_1 zusammenfällt, ein Minimum, und wächst daher von Neuem, wenn S von S_1 bis E zu steigen fortfährt.

Fallen S_1 und S_2 zusammen, und giebt es mithin nur eine durch A und B zu legende Kettenlinie, welche von CD um ihren Parameter absteht, so folgt auf die Zunahme des Products, wenn der Scheitel S von F bis S_2 rückt, unmittelbar die weitere Zunahme bei der Bewegung des Scheitels von S_1 bis E, und das Maximum und Minimum fallen daher weg.

Auf gleiche Art endlich wächst das Product fortwährend, wenn A und B der CD so nahe liegen, dass auch jene eine Kettenlinie nicht mehr construirt werden kann.

Achtes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an elastischen Fäden.

§. 310.

Wie gleich am Anfange dieses Werkes erinnert worden, giebt es in der Natur keinen Körper, dessen Theilchen vollkommen fest mit einander verbunden wä-

Kräfte einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Die Incremente der einzelnen Abstände aber werden:

$$x = -\frac{P}{f},\ y = -\frac{P}{g},\ z = -\frac{P}{h},\ \text{etc.},$$

folglich die Längenzunahme der ganzen Reihe

$$= -P\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}+\frac{1}{h}+..\right).$$

Nehmen wir sämmtliche Abstände AB, BC,... gleich gross an und setzen auch alle die constanten f, g, h,... einander gleich, so ist, wenn n die Zahl der Abstände, und daher $n.AB$ die anfängliche Länge der Reihe ausdrückt, das Wachsthum ihrer Länge $= -nP:f = nQ:g$, also der anfänglichen Länge und den äusseren Kräften, welche am Anfang und Ende angebracht sind, proportional.

Gleichgewicht an einem elastisch dehnbaren Faden.

§. 313.

Je kleiner man bei der eben betrachteten Reihe elastisch verbundener Punkte die einander gleichen Abstände derselben werden lässt, desto mehr nähert man sich dem Begriffe eines gleichförmig dichten und seiner Länge nach gleichförmig elastischen Fadens. Wenn demnach ein solcher Faden eine Länge $=1$ hat, und von zwei an seinen Enden angebrachten Kräften, deren jede $=1$, um eine Länge $=E$ ausgedehnt wird, so wird, zufolge des vorhin von der Reihe Erwiesenen, ein Faden von derselben physischen Beschaffenheit und von einer Länge $=a$ durch zwei ihn spannende Kräfte, deren jede $=P$ ist, eine Längenzunahme $= aPE$ erhalten, und man ersieht zugleich, dass, indem auf diese Weise die anfängliche Länge des Fadens a sich in $a(1+PE)$ ver-

man sich als ein Aggregat von physischen einander unendlich nahe liegenden Punkten vorstellen, von denen jeder mit jedem der übrigen, oder doch mit allen um ihn herum bis auf eine gewisse Entfernung liegenden, auf die eben besagte Weise elastisch verbunden ist. Wirken nun auf ein solches System äussere Kräfte, und sind diese, nachdem sich die ursprünglichen Entfernungen der Punkte von einander dem Gesetze der Elasticität gemäss geändert haben, im Gleichgewichte, so müssen eben so, wie bei dem vorigen Systeme von nur zwei Punkten, an jedem Punkte besonders die äusseren Kräfte den elastischen das Gleichgewicht halten.

§. 311.

Von der Function, welche die elastische Kraft von einer Aenderung $= x$ des Abstandes zweier elastisch verbundener Punkte ist, lässt sich im Allgemeinen nur soviel bestimmen, dass sie für $x = 0$ ebenfalls null seyn und mit x gleichzeitig das Zeichen wechseln muss. Die einfachste Hypothese, die wir hinsichtlich dieser Function machen können, ist daher, dass wir sie der Aenderung x einfach proportional setzen. Auch stimmt diese Annahme, so lange x nur klein ist, sehr wohl mit der Erfahrung überein. Wie übrigens diese Function von der anfänglichen Entfernung der beiden Punkte selbst mit abhängt, lassen wir unentschieden.

Seyen nun A und B die beiden Punkte; auf A wirke die Kraft P, auf B die Kraft Q, und halte die eine der andern das Gleichgewicht. Die Entfernung AB erhalte dadurch das Increment x, und die damit erzeugten auf A und B in AB wirkenden elastischen Kräfte seyen resp. ex und $-ex$, wobei, wenn die Richtung von A nach B für die positive genommen

Ist ferner $d\sigma$ die ursprüngliche Länge des Elements ds, so hat man

$$d\sigma = \frac{ds}{1+ET},$$

woraus sich mit Hülfe des aus den vorigen Gleichungen sich ergebenden Werthes von T die durch die Kräfte bewirkte Ausdehnung $s-\sigma$ des ganzen Fadens oder irgend eines Theils desselben berechnen lässt.

Man kann in dieser Hinsicht bemerken, dass, wenn man vorige drei Gleichungen resp. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und hierauf addirt, die Gleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz + (1+ET)dT = 0$$

hervorgeht (§. 283. *a.*). Hierin T und dT durch das Verhältniss $ds : d\sigma$ und dessen Differential ausgedrückt, kommt

$$Xdx + Ydy + Zdz + \frac{1}{2E} d\left(\frac{ds^2}{d\sigma^2}\right) = 0,$$

eine Formel, wodurch sich die Ausdehnung des Fadens unmittelbar bestimmen lässt.

§. 314.

Lassen wir, um die Theorie des vorhergehenden §. durch ein Beispiel zu erläutern, die Schwerkraft g es seyn, welche auf den Faden wirkt, so ist der Faden, wie im Früheren die unelastische Kettenlinie, in einer verticalen Ebene enthalten, und es sind, wenn diese zur Ebene der x, y genommen wird, bloss die zwei ersten der drei Hauptgleichungen zu berücksichtigen. Hierin werden, wenn man die Axe der y vertical, nach oben zu positiv, seyn lässt: $X=0$ und $Y=-g$, und die zwei Gleichungen selbst reduciren sich damit auf:

und sodann die Werthe der Incremente:

$$x = \frac{Qh - Pg}{fg + gh + hf},\quad y = \frac{Rf - Qh}{fg + gh + hf},\quad \text{und}$$

$$z = x + y = \frac{Rf - Pg}{fg + gh + hf}.$$

Indem man also nächst den Kräften P, Q, R noch die Grössen f, g, h, welche die Stärke der Elasticität für die Linien AB, BC, AC ausdrücken, als gegeben voraussetzt, kann man die Aenderungen x, y, z dieser Linien und damit zugleich die Pressungen fx, gy, hz derselben einzeln berechnen.

Man bemerke hierbei, dass diese drei Pressungen unbestimmt geblieben seyn würden, wenn man die Punkte A, B, C fest, nicht elastisch mit einander verbunden, angenommen hätte, indem zur Bestimmung der gegenseitigen Lage dreier Punkte A, B, C in einer Geraden schon zwei Abstände, wie AB und BC, hinreichen, der dritte AC aber überflüssig ist.

Auf ähnliche Weise verhält es sich auch bei jedem andern Systeme mit einander verbundener Punkte, wenn die Anzahl der Verbindungslinien mehr als hinreichend ist, um die gegenseitige Lage der Punkte zu bestimmen. So lange man diese Linien von unveränderlicher Länge annimmt, bleiben ihre Pressungen zum Theil unbestimmt; sie lassen sich aber insgesammt einzeln angeben, wenn man die Linien elastisch veränderlich setzt.

So hat man für das Gleichgewicht zwischen Kräften, welche an n in einer Geraden liegende und elastisch mit einander verbundene Punkte angebracht sind, und deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, n Gleichungen, für jeden der n Punkte nämlich eine. Aus diesen n Gleichungen wird sich zuerst die Bedin-

(*b*) $hx + i = -\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$, $hy + k = \frac{1}{\sin\psi}$,

woraus, wie in §. 289.:

$$2(hy + k) = e^{hx+i} + e^{-hx-i}, \text{ also}$$

(*c*) $2hy = e^{hx} + e^{-hx} + i\,(e^{hx} - e^{-hx}) - 2k$

folgt. Ferner fliesst aus (*b*):

$$\operatorname{cotg}\psi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi) = \tfrac{1}{2}(e^{hx} - e^{-hx}),$$

wenn man bloss das von i freie Glied beibehält. Substituirt man nun diesen Werth von $\operatorname{cotg}\psi$ in (*a*) und setzt die damit hervorgehenden Werthe von i und k in (*c*), so findet sich

$$2hy = e^{hx} + e^{-hx} - \tfrac{1}{4}AE(e^{hx} - e^{-hx})^2,$$

als Gleichung der elastischen Kettenlinie.

Was hierbei noch die Ausdehnung des Fadens anlangt, so ist unter derselben Annahme, dass die höheren Potenzen von E vernachlässigt werden können, und zufolge des obigen Werthes von T:

$$d\sigma = \frac{ds}{1+ET} = ds - ETds = ds - AE\frac{ds^2}{dx}$$
$$= ds - AEhyds = ds - Egyds,$$

weil $hydx = ds$ (§. 290. *c.*) und $Ah = g$.

Die Ausdehnung des Bogens σ ist daher

$$s - \sigma = Eg\int yds.$$

Hiernach, und weil $(\int yds) : s =$ dem Abstande des Schwerpunktes des Bogens s von der Directrix, ist die Ausdehnung eines Bogens seiner Länge und dem Abstande seines Schwerpunkts von der Directrix proportional.

§. 315.

In dem besondern Falle, wenn von dem elastisch dehnbaren Faden nur das eine Ende B befestigt ist, das andere A aber frei herabhängt, und daher der Fa-

wandelt, seine anfängliche Dichtigkeit sich in dem Verhältniss $1+PE:1$ vermindern muss.

Mit Hülfe dieser Principien können wir jetzt leicht das Gleichgewicht eines elastisch dehnbaren Fadens in Untersuchung nehmen, wenn nicht blos an seinem Anfang und Ende, sondern auch in allen seinen übrigen Punkten (x, y, z) äussere Kräfte (X, Y, Z) thätig sind. Ist nämlich beim Zustande des Gleichgewichts ϱ die Dichtigkeit des Fadenelements ds, mithin ϱds seine Masse, und bezeichnet T die Spannung des Elements, so hat man für das Gleichgewicht desselben, mag es elastisch seyn, oder nicht, die drei Gleichungen (§. 260. und §. 286.):

$$X\varrho\, ds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \text{ u. s. w.}$$

Unter der Voraussetzung nun, dass der Faden vor Einwirkung der Kräfte eine gleichförmige Dichtigkeit $= 1$ gehabt habe und seiner Länge nach eine gleichförmige durch E bestimmte Elasticität besitze, ist die nachherige Dichtigkeit des Elements ds, $= 1 : (1+ET)$, und die drei Gleichungen für das Gleichgewicht werden damit:

$$Xds + (1+ET)\, d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$Yds + (1+ET)\, d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$Zds + (1+ET)\, d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

aus denen, wenn X, Y, Z als Functionen von x, y, z gegeben sind, durch Elimination von T und durch Integration die zwei Gleichungen für die Fadencurve gefunden werden können.

kehrt der jedesmal angehängten Masse, vermehrt um die halbe Masse des Fadens, proportional.

Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden.

§. 316.

Die Kraft der Elasticität kann sich an einem Faden ausserdem, dass sie die Ausdehnung desselben zu verhindern strebt, auch dadurch äussern, dass sie der Biegung des Fadens, d. i. den Kräften, welche seine ursprüngliche Krümmung zu ändern suchen, sich widersetzt. Um auch diese Aeusserung der Elasticität zu untersuchen und dabei auf das Einfachste zu Werke zu gehen, wollen wir die erstere Art von Elasticität jetzt unwirksam seyn lassen, also die Elemente des Fadens von unveränderlicher Länge setzen und für die anfängliche Form des Fadens eine Gerade annehmen.

Sind demnach AB und BC (Fig. 85.) zwei nächstfolgende Elemente des Fadens, so sollen sich, sobald BC nicht mehr die geradlinige Fortsetzung von AB ist, sondern mit AB einen Winkel macht, elastische Kräfte erzeugen, welche die anfängliche geradlinige Lage wieder herzustellen streben. Diese elastischen Kräfte werden ohne Wirkung seyn, sobald man irgend zwei Punkte D und E des einen und andern Schenkels in ihrer jetzigen Lage durch eine Linie DE von unveränderlicher Länge mit einander verbindet; sie werden daher mit den Spannungen dieser Linie in D und E das Gleichgewicht halten und folglich als zwei einander gleiche Kräfte anzusehen seyn, welche auf zwei beliebige Punkte D und E der Schenkel nach direct entgegengesetzten Richtungen wirken.

Die Elasticität des Winkels ABC wird hiernach

Gleichungen für das Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden herzuleiten. Ist nämlich ein solcher, der ursprünglich geradlinig war, durch äussere Kräfte zu der Curve $A \ldots IKLMN$ (Fig. 86.) gebogen worden, so können wir uns das Streben je zweier nächstfolgenden Elemente desselben, wie IK und KL, sich geradlinig neben einander zu legen, durch zwei einander gleiche Kräfte hervorgebracht denken, welche auf zwei beliebige Punkte der Elemente selbst, etwa auf I und L, nach den direct entgegengesetzten Richtungen LI und IL wirken. Indem wir daher solche Paare von Kräften für die Elasticität der von je zwei nächstfolgenden Elementen gebildeten Winkel substituiren, haben wir es wiederum mit einem vollkommen biegsamen Faden zu thun, auf dessen Elemente ausser den äusseren Kräften noch andere durch die Elasticität bestimmte Kräfte, gleich den äussern, wirken, und wir können nun die im Obigen für das Gleichgewicht zwischen bloss äussern Kräften erhaltenen Gleichungen auch auf den gegenwärtigen Fall anwenden.

Am geeignetsten hierzu sind die in §. 281. *b.* gegebenen Momentengleichungen. Sind nämlich, wie wir fürs Erste annehmen wollen, der Faden und die auf ihn wirkenden äussern Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten, so hat man nur auszudrücken, dass das Moment aller auf den Faden von seinem Anfange A bis zu irgend einem andern Punkte M desselben wirkenden Kräfte in Bezug auf letztern Punkt null ist. Es ist aber dieses Moment, wenn zur Ebene des Fadens die der x, y genommen wird, wenn auf jedes seiner Elemente ds die äussere Kraft (Xds, Yds) wirkt, und wenn x, y die Coordinaten von M sind,

$$= \int dy \int Xds - \int dx \int Yds.$$

(*b*) $hx + i = -\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$, $hy + k = \frac{1}{\sin\psi}$,

woraus, wie in §. 289.:

$$2(hy + k) = e^{hx+i} + e^{-hx-i}, \text{ also}$$

(*c*) $2hy = e^{hx} + e^{-hx} + i\,(e^{hx} - e^{-hx}) - 2k$

folgt. Ferner fliesst aus (*b*):

$$\operatorname{cotg}\psi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi) = \tfrac{1}{2}(e^{hx} - e^{-hx}),$$

wenn man bloss das von i freie Glied beibehält. Substituirt man nun diesen Werth von $\operatorname{cotg}\psi$ in (*a*) und setzt die damit hervorgehenden Werthe von i und k in (*c*), so findet sich

$$2hy = e^{hx} + e^{-hx} - \tfrac{1}{4}AE(e^{hx} - e^{-hx})^2,$$

als Gleichung der elastischen Kettenlinie.

Was hierbei noch die Ausdehnung des Fadens anlangt, so ist unter derselben Annahme, dass die höheren Potenzen von E vernachlässigt werden können, und zufolge des obigen Werthes von T:

$$d\sigma = \frac{ds}{1+ET} = ds - ETds = ds - AE\frac{ds^2}{dx}$$
$$= ds - AEhyds = ds - Egyds,$$

weil $hydx = ds$ (§. 290. *c.*) und $Ah = g$.

Die Ausdehnung des Bogens σ ist daher

$$s - \sigma = Eg\int yds.$$

Hiernach, und weil $(\int yds) : s =$ dem Abstande des Schwerpunktes des Bogens s von der Directrix, ist die Ausdehnung eines Bogens seiner Länge und dem Abstande seines Schwerpunkts von der Directrix proportional.

§. 315.

In dem besondern Falle, wenn von dem elastisch dehnbaren Faden nur das eine Ende B befestigt ist, das andere A aber frei herabhängt, und daher der Fa-

den selbst eine Verticale bildet, ist die Spannung in jedem Punkte P des Fadens dem Gewichte des unter P befindlichen Theiles AP gleich. Setzen wir daher $AP = s$, und die ursprüngliche Länge von AP, $= \sigma$, so haben wir $T = g\sigma$ und

$$ds = (1 + ET)\,d\sigma = (1 + Eg\sigma)\,d\sigma,$$

und wenn wir von A bis P integriren:

$$s = \sigma + \tfrac{1}{2}Eg\sigma^2,$$

wo σ und s auch die ursprüngliche und nachherige Länge des ganzen Fadens AB bedeuten können.

Ist an dem herabhängenden Ende A ein Gewicht befestigt, dessen Masse $= M$, so ist $T = g\,(M + \sigma)$, und es findet sich damit auf gleiche Weise

$$s = \sigma + Eg\sigma\,(M + \tfrac{1}{2}\sigma).$$

Hierauf gründet sich eine von **John Herschel** *) vorgeschlagene Methode, um das Verhältniss, in welchem die Schwerkraft auf der Oberfläche der Erde vom Aequator nach den Polen zunimmt, statt durch die bisherigen Pendelbeobachtungen, auf statischem Wege mit Hülfe eines ausdehnbaren Fadens oder einer seine Stelle vertretenden schraubenförmig gewundenen Feder zu messen. Durch kleine versuchsweise zu bestimmende Zusätze oder Verminderungen der Masse M, welche an dem Faden, dessen ursprüngliche Länge $= \sigma$ ist, angehängt wird, sucht man es nämlich zu bewirken, dass bei der von einem Orte zum andern sich nicht ganz gleich bleibenden Schwerkraft, der Faden doch immer zu derselben Länge s ausgedehnt wird. Da nun alsdann in dem obigen Ausdrucke für s, nächst σ und E, noch s constant ist, so ergiebt sich von einem Orte der Erde zum andern die Schwerkraft g umge-

*) Siehe dessen Treatise on Astronomy, Seite 124.

werden, oder man muss die Angriffspunkte M und L dieser zwei Kräfte, und somit das Element LM selbst, unbeweglich machen.

d. Die zwei an dem Elemente LM hinzuzufügenden Kräfte lassen sich im Allgemeinen zu einer einzigen Kraft zusammensetzen, und es reicht dann zur Erhaltung des Gleichgewichts hin, diese eine Kraft, welche R heisse, an irgend einem Punkte ihrer Richtung, der aber mit dem Elemente LM fest verbunden seyn muss, anzubringen, oder einen solchen Punkt unbeweglich zu machen. Da das Gleichgewicht noch am Fadentheile AM fortdauern muss, wenn derselbe steif angenommen wird, so muss die Kraft R mit den äussern Kräften an AM eben so, wie an einem festen Körper, im Gleichgewichte seyn. Der Ausdruck von R ist daher $(-\int X ds, -\int Y ds)$, und das Moment von R in Bezug auf M, $= -u$, da das Moment der äussern Kräfte in Bezug auf denselben Punkt $= u$ war. Hiermit ist die Grösse und Richtung von R vollkommen bestimmt.

e. Man denke sich die Kraft R in demjenigen Punkte m ihrer Richtung angebracht, in welchem sie die Verlängerung des Elements LM, d. i. die in M an die Curve gelegte Tangente, schneidet, und zerlege sie hier in zwei Kräfte T und V, von denen T in die Richtung der Tangente fällt, und V mit dieser Richtung 90° macht. Sey zu dem Ende noch der Winkel von R mit der Axe der x, $= \varphi$, und der Winkel des Elements ds mit derselben Axe, $= \psi$, so hat man $R\cos\varphi = -\int X ds$, $R\sin\varphi = -\int Y ds$, $ds\cos\psi = dx$, $ds\sin\psi = dy$, und daher:

$$T = R\cos(\varphi - \psi) = -\frac{dx}{ds}\int X ds - \frac{dy}{ds}\int Y ds,$$

Gleichungen für das Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden herzuleiten. Ist nämlich ein solcher, der ursprünglich geradlinig war, durch äussere Kräfte zu der Curve $A \ldots IKLMN$ (Fig. 86.) gebogen worden, so können wir uns das Streben je zweier nächstfolgenden Elemente desselben, wie IK und KL, sich geradlinig neben einander zu legen, durch zwei einander gleiche Kräfte hervorgebracht denken, welche auf zwei beliebige Punkte der Elemente selbst, etwa auf I und L, nach den direct entgegengesetzten Richtungen LI und IL wirken. Indem wir daher solche Paare von Kräften für die Elasticität der von je zwei nächstfolgenden Elementen gebildeten Winkel substituiren, haben wir es wiederum mit einem vollkommen biegsamen Faden zu thun, auf dessen Elemente ausser den äusseren Kräften noch andere durch die Elasticität bestimmte Kräfte, gleich den äussern, wirken, und wir können nun die im Obigen für das Gleichgewicht zwischen bloss äussern Kräften erhaltenen Gleichungen auch auf den gegenwärtigen Fall anwenden.

Am geeignetsten hierzu sind die in §. 281. *b.* gegebenen Momentengleichungen. Sind nämlich, wie wir fürs Erste annehmen wollen, der Faden und die auf ihn wirkenden äussern Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten, so hat man nur auszudrücken, dass das Moment aller auf den Faden von seinem Anfange A bis zu irgend einem andern Punkte M desselben wirkenden Kräfte in Bezug auf letztern Punkt null ist. Es ist aber dieses Moment, wenn zur Ebene des Fadens die der x, y genommen wird, wenn auf jedes seiner Elemente ds die äussere Kraft (Xds, Yds) wirkt, und wenn x, y die Coordinaten von M sind,

$$= \int dy \int Xds - \int dx \int Yds.$$

bloss in der Richtung der Tangente beweglich gemacht wird, zur Erhaltung des Gleichgewichts nach derselben Richtung am letzten Punkte angebracht werden muss.

Die Kraft T ist daher die Spannung der elastischen Linie, und zwar eine wirkliche Spannung, wie bei vollkommen biegsamen Fäden, oder eine Pressung, nachdem sich T positiv oder negativ findet.

Uebrigens ergiebt sich derselbe Ausdruck, den wir jetzt für die Spannung am elastischen Faden gefunden haben, auch für die Spannung am vollkommen biegsamen Faden, wenn man die für letzteren geltenden Gleichungen

$$\int X ds + T\xi = 0 \text{ und } \int Y ds + T\eta = 0 \text{ (§. 280.)},$$

wo $\xi = dx : ds$, und $\eta = dy : ds$, resp. mit ξ und η multiplicirt und hierauf addirt.

§. 319.

In der am Ende des §. 317. erhaltenen Gleichung (A) für das Gleichgewicht des elastischen Fadens ist noch der von einem Punkte des Fadens zum andern veränderliche Werth des Moments u zu bestimmen übrig. In dieser Hinsicht erwäge man zuerst, dass unter der Voraussetzung eines gleichförmig elastischen Fadens, und wenn man alle Elemente des Fadens von gleicher Länge annimmt, die Veränderlichkeit des Moments u von einem Punkte M des Fadens zum andern bloss von der Veränderlichkeit des Winkels $d\psi$, um welchen das Element MN von der Richtung des vorhergehenden LM abgelenkt worden, abhängig seyn kann. Von dieser Abhängigkeit ist aber im Allgemeinen gewiss, dass mit der Zunahme des Winkels $d\psi$ auch das Moment u wachsen muss. Lässt man näm-

bezeichnet. Das Moment ε ist daher positiv oder negativ, jenachdem dieser Winkel ψ ab- oder zunimmt.

b. Unter derselben Annahme, dass L und N die Angriffspunkte der zwei elastischen Kräfte des Winkels LMN sind, ist die gemeinschaftliche Intensität dieser Kräfte $= \varepsilon : LM \sin NLM$ (§. 316.), also unendlich gross von der zweiten Ordnung, weil ε nach der letzten Gleichung des vorigen §. eine endliche Grösse ist.

Will man die Elasticität des Winkels durch endliche Kräfte darstellen, so nehme man zum Angriffe der auf LM wirkenden Kraft einen Punkt l, der in der geradlinigen Verlängerung von LM in endlicher Entfernung von M liegt, lege durch l unter einem endlichen Winkel mit LM eine Gerade, welche die Verlängerung von MN in n treffe, und lasse n den Angriffspunkt der Kraft an MN seyn. Die beiden Kräfte haben alsdann die Richtungen ln und nl, und ihre gemeinschaftliche Grösse ist $= \varepsilon : Ml \sin Mln$, also endlich.

c. Wird von dem im Gleichgewichte befindlichen elastischen Faden AMO ein Theil MO getrennt, und soll der übrig bleibende Theil AM im Gleichgewichte verharren, so ist es hier nicht, wie beim vollkommen biegsamen Faden, hinreichend, den Endpunkt M dieses Theils unbeweglich zu machen. Denn auf den Theil AM wirkt der Theil MO nicht allein durch die in M ausgeübte Pressung, sondern auch durch die eine der zwei elastischen Kräfte des Winkels LMN, welche irgendwo in LM, etwa in L, nur nicht in M selbst, ihren Angriffspunkt hat. Soll daher der Theil AM nach Wegnahme des Theils MO im Gleichgewichte noch bleiben, so müssen entweder zwei, die Stelle jener Pressung und dieser elastischen Kraft vertretende Kräfte hinzugefügt

werden, oder man muss die Angriffspunkte M und L dieser zwei Kräfte, und somit das Element LM selbst, unbeweglich machen.

d. Die zwei an dem Elemente LM hinzuzufügenden Kräfte lassen sich im Allgemeinen zu einer einzigen Kraft zusammensetzen, und es reicht dann zur Erhaltung des Gleichgewichts hin, diese eine Kraft, welche R heisse, an irgend einem Punkte ihrer Richtung, der aber mit dem Elemente LM fest verbunden seyn muss, anzubringen, oder einen solchen Punkt unbeweglich zu machen. Da das Gleichgewicht noch am Fadentheile AM fortdauern muss, wenn derselbe steif angenommen wird, so muss die Kraft R mit den äussern Kräften an AM eben so, wie an einem festen Körper, im Gleichgewichte seyn. Der Ausdruck von R ist daher $(-\int X ds, -\int Y ds)$, und das Moment von R in Bezug auf M, $= -u$, da das Moment der äussern Kräfte in Bezug auf denselben Punkt $= u$ war. Hiermit ist die Grösse und Richtung von R vollkommen bestimmt.

e. Man denke sich die Kraft R in demjenigen Punkte m ihrer Richtung angebracht, in welchem sie die Verlängerung des Elements LM, d. i. die in M an die Curve gelegte Tangente, schneidet, und zerlege sie hier in zwei Kräfte T und V, von denen T in die Richtung der Tangente fällt, und V mit dieser Richtung 90° macht. Sey zu dem Ende noch der Winkel von R mit der Axe der x, $= \varphi$, und der Winkel des Elements ds mit derselben Axe, $= \psi$, so hat man $R\cos\varphi = -\int X ds$, $R\sin\varphi = -\int Y ds$, $ds\cos\psi = dx$, $ds\sin\psi = dy$, und daher:

$$T = R\cos(\varphi - \psi) = -\frac{dx}{ds}\int X ds - \frac{dy}{ds}\int Y ds,$$

$$V = R\sin(s-v) = -\frac{dx}{ds}\int Y ds + \frac{dy}{ds}\int X ds = \frac{du}{ds}.$$

Nun ist in Bezug auf den Punkt M das Moment von T, $= 0$ und das Moment von V, $= Mm \cdot V$, folglich auch das Moment der Resultante R von T und V, $= Mm \cdot V$. Das Moment von R ist aber nach d, $= -u$, folglich ist

$$Mm = -\frac{u}{V} = -\frac{ds}{du}\left(\frac{dy}{ds}\int X ds - \frac{dx}{ds}\int Y ds\right) = -\frac{u ds}{du},$$

wodurch der Punkt m in der Richtung von R bestimmt ist. — Statt das Element LM unbeweglich anzunehmen, reicht es daher auch hin, den in der geradlinigen Verlängerung von LM liegenden Punkt m unbeweglich sein zu lassen.

Ist der Faden nicht elastisch, so genügt zur Erhaltung des Gleichgewichts des in M unterbrochenen Theils dM eine auf M nach der Richtung der Tangente wirkende Kraft, welche im Obigen die Spannung des Fadens genannt wurde. Bei dem elastischen Faden aber ist zur Bewahrung des Gleichgewichts die Kraft V, deren Richtung in die Tangente fällt, und für deren Angriffspunkt M selbst genommen werden kann, noch nicht hinreichend, sondern es muss noch die auf der Tangente in m normale Kraft V hinzugefügt werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es muss das Element LM durch irgend welche Mittel, — etwa durch zwei unbewegliche Punkte, an denen es verschiebbar ist, — nur in sich selbst beweglich gemacht werden. Wollen wir daher auf analoge Weise, wie beim vollkommen biegsamen Faden, auch bei dem elastischen von der Spannung sprechen, so haben wir sie als die Kraft zu definiren, die, wenn der Faden irgendwo unterbrochen und das letzte Element daselbst

bloss in der Richtung der Tangente beweglich gemacht wird, zur Erhaltung des Gleichgewichts nach derselben Richtung am letzten Punkte angebracht werden muss.

Die Kraft T ist daher die Spannung der elastischen Linie, und zwar eine wirkliche Spannung, wie bei vollkommen biegsamen Fäden, oder eine Pressung, nachdem sich T positiv oder negativ findet.

Uebrigens ergiebt sich derselbe Ausdruck, den wir jetzt für die Spannung am elastischen Faden gefunden haben, auch für die Spannung am vollkommen biegsamen Faden, wenn man die für letzteren geltenden Gleichungen

$\int X ds + T\xi = 0$ und $\int Y ds + T\eta = 0$ (§. 280.),

wo $\xi = dx : ds$, und $\eta = dy : ds$, resp. mit ξ und η multiplicirt und hierauf addirt.

§. 319.

In der am Ende des §. 317. erhaltenen Gleichung (A) für das Gleichgewicht des elastischen Fadens ist noch der von einem Punkte des Fadens zum andern veränderliche Werth des Moments u zu bestimmen übrig. In dieser Hinsicht erwäge man zuerst, dass unter der Voraussetzung eines gleichförmig elastischen Fadens, und wenn man alle Elemente des Fadens von gleicher Länge annimmt, die Veränderlichkeit des Moments u von einem Punkte M des Fadens zum andern bloss von der Veränderlichkeit des Winkels $d\psi$, um welchen das Element MN von der Richtung des vorhergehenden LM abgelenkt worden, abhängig seyn kann. Von dieser Abhängigkeit ist aber im Allgemeinen gewiss, dass mit der Zunahme des Winkels $d\psi$ auch das Moment u wachsen muss. Lässt man näm-

durch Null aus dem Positiven in's Negative, oder umgekehrt, über, d. h. die Curve hat an jeder Stelle, wo sie die Axe schneidet, einen Wendepunkt. Auch kann sie nirgendwo anders einen solchen haben, da nur für $y = 0$ der Krümmungshalbmesser r unendlich gross werden kann.

Endlich erhellet, dass, wenn der erste oder letzte Punkt des Fadens in die Axe fällt, die mit dem Elemente daselbst in Verbindung zu setzende Kraft A an ihm selbst, nicht erst an einem andern mit ihm verbundenen Punkte, angebracht werden kann. So ist z. B. bei einem durch eine Sehne gespannten elastischen Bogen die Sehne selbst die Axe, und die Spannung der Sehne = der mit A bezeichneten Kraft. Die Krümmung des Bogens ist daher an seinen beiden Enden null und in dem von der Sehne entferntesten Punkte am stärksten. Eben so ist bei einem elastischen Stabe, dessen erstes Element in irgend einer Lage unbeweglich gemacht wird, und an dessen letztes Element ein Faden mit einem angehängten Gewichte befestigt wird, die verticale Linie des Fadens die Axe der von dem Stabe gebildeten elastischen Curve.

§. 321.

Um aus der Gleichung der Curve zwischen y und r eine Gleichung zwischen x und y herzuleiten, führe man zunächst statt r den Winkel ψ ein, den das Element ds mit der Axe macht, und es wird (§. 319.):

$$Ay = \frac{\varepsilon}{r} = -\frac{\varepsilon d\psi}{ds}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt:

$$Ady = A\sin\psi ds = -\varepsilon d\left(\frac{d\psi}{ds}\right).$$

Multiplicirt man hierein $\frac{d\psi}{ds}$ und integrirt dann, so kommt:

$$A\cos\psi + C = \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = \frac{A^2y^2}{2\varepsilon}.$$

Die Constante C kann man unter andern durch die grösste Abweichung der Curve von der Axe, d. i. durch den grössten Werth von y, welcher h heisse, bestimmen. Er findet statt für $\psi = 0$, oder für $\psi = 180^0$, nachdem man die Axe der x, d. i. die Axe der elastischen Linie, nach der einen oder nach der andern Seite zu positiv seyn lässt. Man wähle diejenige Richtung dieser Axe zur positiven, bei welcher für den grössten Werth von y, $\psi = 0$ wird, und man hat:

$$A + C = \frac{A^2}{2\varepsilon}h^2,$$

$$\text{folglich } 2\varepsilon(1-\cos\psi) = A(h^2-y^2),$$

woraus zugleich ersichtlich, dass die Richtung der auf den Anfang der Curve in der Axe wirkenden Kraft A mit der für die Axe festgesetzten positiven Richtung übereinstimmt; denn ε sowohl, als h^2-y^2, ist positiv.

Setzt man nun noch $\frac{A}{2\varepsilon}(h^2-y^2) = x^2$,

$$\text{so wird } \frac{dx}{ds} = \cos\psi = 1-x^2, \text{ und}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\cos^2\psi}\sqrt{1+\cos\psi}},$$

$$\text{d. i. } dx = \frac{1-x^2}{x\sqrt{2-x^2}}dy.$$

Weil x eine bekannte Function von y ist, so sind in dieser Gleichung die Veränderlichen getrennt, und die dadurch mögliche Integration giebt die verlangte Gleichung zwischen x und y. Indessen hängt diese In-

tegration von der Rectification der Kegelschnitte ab und ist daher durch einen geschlossenen Ausdruck nicht ausführbar.

Was noch die Spannung der elastischen Linie anlangt, so ist hier wegen $\int X ds = A$ und $\int Y ds = B = 0$:

$$T = -A\frac{dx}{ds} = -A\cos\psi \quad (\S.318.\ e.).$$

Die Spannung in irgend einem Punkte der elastischen Linie ist demnach dem Cosinus des Winkels proportional, den die Berührende daselbst mit der Axe macht, und ist eine Pressung oder eine wirkliche Spannung, je nachdem dx positiv oder negativ ist, d. h. *je nachdem, wenn man in der Curve vom Anfange zum Ende fortgeht, die Richtung dieses Wegs, wenn sie nach der Richtung der am Anfange wirkenden Kraft A geschätzt wird, mit dieser Richtung*, als der positiven Richtung der Axe der x, *übereinstimmt, oder ihr entgegengesetzt ist.* In dem von der Axe entferntesten Punkte, wo $dx = ds$, ist daher die Spannung stets eine Pressung und hat unter allen Pressungen und eigentlichen Spannungen den absolut grössten Werth $= A$.

Bei der elastischen Linie $PRSTQ$ (Fig. 87.) z. B., auf deren Anfangspunkt P und Endpunkt Q gleiche und entgegengesetzte Kräfte nach den Richtungen MP und NQ wirken, wo daher PQ die Axe und MP die positive Richtung derselben ist, und wo die in R und T an die Curve gelegten Tangenten die Axe rechtwinklich treffen, nimmt x von P bis R ab, von R bis T zu und von T bis Q wieder ab. Mithin findet von P bis R und von T bis Q wirkliche Spannung, von R bis T aber Pressung statt. In R und T, wo $dx = 0$, geht die eine in die andere durch Null über.

Bei der weniger gekrümmten Linie PSQ (Fig. 88.) nimmt x von P bis Q fortwährend zu, und es herrscht folglich hier überall Pressung. In beiderlei Curven aber bezeichnet S den von der Axe entlegensten Punkt, wo die Pressung am stärksten ist.

§. 322.

Entwickelt man in der im vor. §. erhaltenen Differentialgleichung den Coefficient von dy in eine nach wachsenden Potenzen von x fortlaufende Reihe, so wird diese, wenn die Curve nur wenig von ihrer Axe abweicht, wenn also h, und folglich auch x nur klein ist, schnell convergiren. Für eine sehr geringe Abweichung kann es hinreichen, nur das erste Glied dieser Reihe beizubehalten; man hat alsdann:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2.x}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{h^2 - y^2}},$$

und wenn man integrirt:

$$y = h \sin\left(\sqrt{\frac{A}{\varepsilon}} . x\right),$$

wo die neue Constante unter der Voraussetzung, dass y mit x zugleich verschwinden soll, weggelassen ist. Die hierdurch ausgedrückte Linie läuft wellenförmig über und unter der Axe hin (Fig. 89.) und schneidet sie in Punkten F, H, K, M, deren jeder von dem nächstfolgenden um ein Intervall $= \pi\sqrt{(\varepsilon : A)}$ entfernt ist, wo $\pi =$ der halben Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$. Mitten zwischen je zwei solchen Punkten ist die Abweichung der Curve von der Axe am grössten, nämlich $= h$.

Setzt man den Bogen FGH der Curve, der zwischen zwei nächstfolgende Durchschnitte derselben

durch Null aus dem Positiven in's Negative, oder umgekehrt, über, d. h. die Curve hat an jeder Stelle, wo sie die Axe schneidet, einen Wendepunkt. Auch kann sie nirgendwo anders einen solchen haben, da nur für $y = 0$ der Krümmungshalbmesser r unendlich gross werden kann.

Endlich erhellet, dass, wenn der erste oder letzte Punkt des Fadens in die Axe fällt, die mit dem Elemente daselbst in Verbindung zu setzende Kraft A an ihm selbst, nicht erst an einem andern mit ihm verbundenen Punkte, angebracht werden kann. So ist z. B. bei einem durch eine Sehne gespannten elastischen Bogen die Sehne selbst die Axe, und die Spannung der Sehne = der mit A bezeichneten Kraft. Die Krümmung des Bogens ist daher an seinen beiden Enden null und in dem von der Sehne entferntesten Punkte am stärksten. Eben so ist bei einem elastischen Stabe, dessen erstes Element in irgend einer Lage unbeweglich gemacht wird, und an dessen letztes Element ein Faden mit einem angehängten Gewichte befestigt wird, die verticale Linie des Fadens die Axe der von dem Stabe gebildeten elastischen Curve.

§. 321.

Um aus der Gleichung der Curve zwischen y und r eine Gleichung zwischen x und y herzuleiten, führe man zunächst statt r den Winkel ψ ein, den das Element ds mit der Axe macht, und es wird (§. 319.):

$$Ay = \frac{\varepsilon}{r} = -\frac{\varepsilon d\psi}{ds}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt:

$$Ady = A\sin\psi ds = -\varepsilon d\left(\frac{d\psi}{ds}\right).$$

zu einem einfachen zu krümmen, eben so gross seyn seyn müssen, als die geringste Kraft, welche nöthig ist, um eine Gerade $= l = k : s$ in einen einfachen Bogen FGH zu verwandeln; die Kraft wird folglich proportional mit $s^2 : k^2$ seyn müssen, d. h. direct proportional dem Quadrate der Zahl der Bögen, in welche die Gerade sich theilen soll, und umgekehrt dem Quadrate der Länge der Geraden.

§. 323.

Unter den mannigfachen Formen, welche die elastische Linie haben kann *), ist auch die Kreisform enthalten. Denn stellt man sich vor, dass eine geschlossene Kreislinie gleichförmig elastisch wird, und sich in eine Gerade auszudehnen strebt, so ist bei der überall gleichen Krümmung des Kreises kein Grund vorhanden, warum irgend ein Theil desselben seine Krümmung, falls er sie ändert, mehr oder weniger, als ein anderer Theil ändern sollte. Durch eine gleichförmige Aenderung der Krümmung würde aber der Kreis selbst entweder grösser oder kleiner, welches nicht seyn kann, da die Linie von unveränderlicher Länge seyn soll. Mithin bleibt der Kreis unverändert.

Als Axe der elastischen Kreislinie ist eine in der Kreisebene unendlich entfernte Gerade anzunehmen. Denn nur bei dieser Annahme kann die Entfernung jedes Punktes der Kreislinie von der Axe als proportional der von einem Punkte zum andern constanten Krümmung des Kreises angesehen werden.

Soll daher ein Theil des elastischen Kreises, getrennt von dem übrigen, seine Kreisbogenform unver-

*) Euler zählt neun Species dieser Formen. Siehe dessen Methodus inveniendi lineas curv. etc. Additam. I. de curvis elasticis.

tegration von der Rectification der Kegelschnitte ab und ist daher durch einen geschlossenen Ausdruck nicht ausführbar.

Was noch die Spannung der elastischen Linie anlangt, so ist hier wegen $\int X ds = A$ und $\int Y ds = B = 0$:

$$T = -A\frac{dx}{ds} = -A\cos\omega \quad (\S.\,318.\ a.).$$

Die Spannung in irgend einem Punkte der elastischen Linie ist demnach dem Cosinus des Winkels proportional, den die Berührende daselbst mit der Axe macht, und ist eine Pressung oder eine wirkliche Spannung, je nachdem dx positiv oder negativ ist, d. h. *je nachdem, wenn man in der Curve vom Anfange zum Ende fortgeht, die Richtung dieses Weges, wenn sie nach der Richtung der am Anfange wirkenden Kraft A geschätzt wird, mit dieser Richtung*, als der positiven Richtung der Axe der x, *übereinstimmt, oder ihr entgegengesetzt ist.* In dem von der Axe entferntesten Punkte, wo $dx = ds$, ist daher die Spannung stets eine Pressung und hat unter allen Pressungen und eigentlichen Spannungen den absolut grössten Werth $= A$.

Bei der elastischen Linie $PRSTQ$ (Fig. 87.) z. B., auf deren Anfangspunkt P und Endpunkt Q gleiche und entgegengesetzte Kräfte nach den Richtungen MP und NQ wirken, wo daher PQ die Axe und MP die positive Richtung derselben ist, und wo die in R und T an die Curve gelegten Tangenten die Axe rechtwinklich treffen, nimmt x von P bis R ab, von R bis T zu und von T bis Q wieder ab. Mithin findet von P bis R und von T bis Q wirkliche Spannung, von R bis T aber Pressung statt. In R und T, wo $dx = 0$, geht die eine in die andere durch Null über.

Bei der weniger gekrümmten Linie PSQ (Fig. 88.) nimmt x von P bis Q fortwährend zu, und es herrscht folglich hier überall Pressung. In beiderlei Curven aber bezeichnet S den von der Axe entlegensten Punkt, wo die Pressung am stärksten ist.

§. 322.

Entwickelt man in der im vor. §. erhaltenen Differentialgleichung den Coefficient von dy in eine nach wachsenden Potenzen von x fortlaufende Reihe, so wird diese, wenn die Curve nur wenig von ihrer Axe abweicht, wenn also h, und folglich auch x nur klein ist, schnell convergiren. Für eine sehr geringe Abweichung kann es hinreichen, nur das erste Glied dieser Reihe beizubehalten; man hat alsdann:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2.x}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{h^2 - y^2}},$$

und wenn man integrirt:

$$y = h \sin\left(\sqrt{\frac{A}{\varepsilon}} \cdot x\right),$$

wo die neue Constante unter der Voraussetzung, dass y mit x zugleich verschwinden soll, weggelassen ist. Die hierdurch ausgedrückte Linie läuft wellenförmig über und unter der Axe hin (Fig. 89.) und schneidet sie in Punkten F, H, K, M, deren jeder von dem nächstfolgenden um ein Intervall $= \pi\sqrt{(\varepsilon : A)}$ entfernt ist, wo $\pi =$ der halben Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$. Mitten zwischen je zwei solchen Punkten ist die Abweichung der Curve von der Axe am grössten, nämlich $= h$.

Setzt man den Bogen FGH der Curve, der zwischen zwei nächstfolgende Durchschnitte derselben

mit der Axe Gilt, $= l$, so ist l grösser, als der da-
von [illegible] Theil [illegible] der Axe, mithin

$$A \frac{m}{l}.$$

[illegible] der Bogen FGH für sich im Gleich-
[illegible] zwei einander gleichen und di-
[illegible] Kräfte A unmittelbar an dem
[illegible] Bogens angemacht werden
[illegible] den merkwürdigen Schluss:
[illegible] *Gerade durch zwei an ihren*
[illegible] *einander gleiche und entgegen-*
[illegible] *zu einem Bogen gekrümmt werden,*
[illegible] *gemeinschaftliche Intensität der Kräfte*
[illegible] *Minimum überschreiten. Dieses Mini-*
[illegible] *Intensität, welches man auch die elasti-*
[illegible] *der Geraden nennt, ist im directen*
[illegible] *des Coefficienten der Elastizität* ε *und*
[illegible] *quadratischen Verhältnisse der Länge*
[illegible] *Geraden.* — So ist z. B. die geringste Kraft,
[illegible] zur Krümmung einer zwei- oder dreimal so
[illegible] Geraden erfordert wird, nur der vierte oder
[illegible] Theil der geringsten Kraft, welche zur Krüm-
mung der Geraden von einfacher Länge nöthig ist.

Verlängert man die elastische Linie FGH über H
hinaus, bis sie der Axe weiterhin in K, M, ... begeg-
net, so sind nicht nur die Geraden FH, HK, KM, etc.
unter sich, sondern auch die Bögen FGH, HIK, etc.
unter sich gleich, und man kann die der A gleiche
und entgegengesetzte Kraft, statt in H, auch in K,
oder in M, etc. anbringen. Es wird folglich auch die
geringste Kraft, um eine Gerade $= 2l$, oder $3l$, etc.
oder $il = k$ zu einem doppelten Bogen, wie FK,
oder zu einem dreifachen, wie FM, etc. oder

zu einem $s$fachen zu krümmen, eben so gross seyn seyn müssen, als die geringste Kraft, welche nöthig ist, um eine Gerade $= l = k : s$ in einen einfachen Bogen FGH zu verwandeln; die Kraft wird folglich proportional mit $s^2 : k^2$ seyn müssen, d. h. direct proportional dem Quadrate der Zahl der Bögen, in welche die Gerade sich theilen soll, und umgekehrt dem Quadrate der Länge der Geraden.

§. 323.

Unter den mannigfachen Formen, welche die elastische Linie haben kann *), ist auch die Kreisform enthalten. Denn stellt man sich vor, dass eine geschlossene Kreislinie gleichförmig elastisch wird, und sich in eine Gerade auszudehnen strebt, so ist bei der überall gleichen Krümmung des Kreises kein Grund vorhanden, warum irgend ein Theil desselben seine Krümmung, falls er sie ändert, mehr oder weniger, als ein anderer Theil ändern sollte. Durch eine gleichförmige Aenderung der Krümmung würde aber der Kreis selbst entweder grösser oder kleiner, welches nicht seyn kann, da die Linie von unveränderlicher Länge seyn soll. Mithin bleibt der Kreis unverändert.

Als Axe der elastischen Kreislinie ist eine in der Kreisebene unendlich entfernte Gerade anzunehmen. Denn nur bei dieser Annahme kann die Entfernung jedes Punktes der Kreislinie von der Axe als proportional der von einem Punkte zum andern constanten Krümmung des Kreises angesehen werden.

Soll daher ein Theil des elastischen Kreises, getrennt von dem übrigen, seine Kreisbogenform unver-

*) Euler zählt neun Species dieser Formen. Siehe dessen Methodus inveniendi lineas curv. etc. Additam. I. de curvis elasticis.

nung auch erhalten, wenn man letztere Kräfte parallel mit einer, ihrer ursprünglichen Richtung entgegengesetzten, Richtung an einen und denselben Punkt trägt und hierauf ihre Resultante, welche ($-\int X ds$, $-\int Y ds$, $-\int Z ds$) ist, auf die Richtung des Elementes ds projicirt, d. i. mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den die Richtung der Resultante mit dem Elemente ds bildet. Auf diese Weise findet sich die Spannung

$$T = -\frac{dx}{ds}\int X ds - \frac{dy}{ds}\int Y ds - \frac{dz}{ds}\int Z ds,$$

und ist wie in §. 318, *f.* eine wirkliche Spannung oder Pressung, nachdem sich für T ein positiver oder negativer Werth ergiebt.

Man nimmt übrigens leicht wahr, dass dieselben Betrachtungen, welche uns jetzt zu dem Ausdrucke für T bei dem elastischen Faden leiteten, zu dem nämlichen Ausdrucke für T auch bei dem nicht elastischen Faden führen, und dass auch in der That dieser Ausdruck durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) in §. 280. hervorgeht.

§. 326.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über den elastisch biegsamen Faden im Raume wollen wir noch den speciellen Fall näher untersuchen, wenn auf den äussern Faden keine Kräfte wirken, sondern bloss das erste und letzte Element desselben an gegebenen Oertern und in gegebenen Richtungen befestigt sind.

Wird die Unbeweglichkeit des einen der beiden äussersten Elemente aufgehoben, und soll dabei die Gestalt des Fadens unverändert bleiben, so müssen an

Punkten dieses Elements, oder auch an Punkten, die mit ihm fest verbunden sind, Kräfte von gewisser Richtung und Intensität angebracht werden. Eben so kann auch die Unbeweglichkeit des andern Grenzelements durch Kräfte ersetzt werden, und letztere Kräfte müssen den ersteren eben so, wie an einem festen Körper, das Gleichgewicht halten.

Die auf solche Weise an dem beweglich gemachten ersten Elemente anzubringenden Kräfte wollen wir, wie dies im Allgemeinen immer möglich ist, auf eine einfache Kraft A und ein Paar reduciren, und zwar so, dass die einfache Kraft auf der Ebene des Paares normal steht. Werde nun die Richtung von A zur Axe der x, und folglich die Ebene des Paares, oder eine mit ihr parallele, zur Ebene der y, z genommen. Alsdann ist, wenn das Moment des Paares, in Bezug auf einen Punkt seiner Ebene $= m$ gesetzt wird, sein Moment auch rücksichtlich der Axe der x, so wie jeder damit parallelen Axe, $= m$; rücksichtlich der Axe der y aber, oder der Axe der z, oder irgend einer damit parallelen Axe ist es $= 0$. Ferner sind von der Kraft A in Bezug auf drei durch den Punkt (x, y, z) der Curve mit den Axen der x, y, z parallel gelegte Axen die Momente resp. $= 0$, $-Az$, $+Ay$ *). In Bezug auf diese drei Axen sind daher die Momente aller auf das erste Element des Fadens wirkenden Kräfte resp.

$$= m, \quad -Az, \quad +Ay;$$

*) Ueberhaupt nämlich sind in Beziehung auf dieselben drei Axen die Momente einer Kraft (A, B, C), deren Angriffspunkt (a, b, c) ist:

$$C(b-y) - B(c-z), \quad A(c-z) - C(a-x),$$
$$B(a-x) - A(b-y)$$ (§§. 65. und 66.).

und da bis zum Punkte (x, y, z) ausser ihnen keine andern Kräfte auf den Faden wirken sollen, so haben wir diese drei Momente in den drei Hauptgleichungen für die Integralausdrücke linker Hand zu substituiren, und wir erhalten damit, wenn wir noch, grösserer Einfachheit willen, dx constant setzen, die drei Gleichungen:

$$(A)\quad \begin{cases} m = \varepsilon \dfrac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}, \\ -Ax = \varepsilon \dfrac{dx\,d^2z}{ds^3}, \quad Ay = -\varepsilon \dfrac{dx\,d^2y}{ds^3}, \end{cases}$$

oder auch $m = -\dfrac{2\varepsilon\Delta_1}{ds^3}$, $-Ax = -\dfrac{2\varepsilon\Delta_2}{ds^3}$, $Ay = -\dfrac{2\varepsilon\Delta_3}{ds^3}$,

wo Δ_1, Δ_2, Δ_3 die Projectionen des Elementardreiecks LMN auf die drei coordinirten Ebenen sind (§. 324.). Es ist aber, wenn wir dieses Dreieck $LMN = \Delta$ setzen, und wenn r den Krümmungshalbmesser der Curve in M bedeutet: $r = -ds^3 : 2\Delta$ (§. 319.), und wir können daher letztere drei Gleichungen auch also schreiben:

$$(B)\quad m = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad -Ax = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad Ay = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Aus ihnen lassen sich nachstehende merkwürdige Eigenschaften der elastischen Linie im Raume (vergl. §. 320.) herleiten. — Die jetzige Axe der x oder diejenige Gerade, welche rücksichtlich der auf das erste Element der Curve wirkenden Kräfte die Hauptlinie des Systems ist (§. 82.), heisse vorzugsweise die Axe der Curve. Nun ist Δ_1 die Projection des Dreiecks Δ auf die Ebene der y, z, folglich $\Delta_1 : \Delta$ = dem Cosinus des Winkels, den die Ebene des Dreiecks Δ mit der Ebene der y, z macht, $= \sin\chi$, wenn

χ der Winkel der Ebene von A, d. i. der Krümmungsebene, mit der Axe der Curve bedeutet. Statt der ersten der Gleichungen (B) können wir daher auch schreiben:

$$(a) \quad m = \frac{\varepsilon}{r} \sin\chi.$$

Ferner ist zu Folge der Eigenschaft rechtwinkliger Projectionen: $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A^2$, und daher, wenn man die Quadrate der 3 Gleichungen (B) addirt:

$$(b) \quad m^2 + A^2(y^2 + x^2) = \frac{\varepsilon^2}{r^2},$$

woraus in Verbindung mit (a)

$$(c) \quad A\sqrt{(y^2 + x^2)} = \frac{\varepsilon}{r} \cos\chi \text{ und}$$

$$(d) \quad A\sqrt{(y^2 + x^2)} = m \operatorname{cotg}\chi \text{ folgt.}$$

Die erste (a) dieser Gleichungen lehrt nun, *dass die Krümmung der elastischen Linie umgekehrt dem Sinus des Winkels proportional ist, den die Krümmungsebene mit der Axe der Linie bildet.*

Die zweite Gleichung (b) ist der Gleichung $Ay = \varepsilon : r$ für die elastische Linie in einer Ebene (§. 320.) analog und drückt aus, *dass die Krümmung in jedem Punkte proportional der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete von constanter Länge* $(= m : A)$, *und dessen andere Kathete dem Abstande des Punktes von der Axe gleich ist.*

Auch hier also wird, wie in §. 320., die Krümmung desto schwächer, je näher die Curve der Axe kommt; und weil mit wachsendem r nach (a) auch $\sin\chi$ wächst, so nähert sich dabei die Krümmungsebene immer mehr der auf der Axe normalen Lage. Begeg-

und da bis zum Punkte (x, y, z) ausser ihnen keine andern Kräfte auf den Faden wirken sollen, so haben wir diese drei Momente in den drei Hauptgleichungen für die Integralausdrücke linker Hand zu substituiren, und wir erhalten damit, wenn wir noch, grösserer Einfachheit willen, ds constant setzen, die drei Gleichungen:

$$(A)\quad \left|\begin{array}{l} m = \varepsilon \dfrac{dx d^2y - dy d^2x}{ds^3}, \\ -Ax = \varepsilon \dfrac{dz d^2x}{ds^3},\quad Ay = -\varepsilon \dfrac{dz d^2y}{ds^3}, \end{array}\right.$$

oder auch $m = -\dfrac{2\varepsilon \Delta_1}{ds^3}, -Ax = -\dfrac{2\varepsilon \Delta_2}{ds^3}, Ay = -\dfrac{2\varepsilon \Delta_3}{ds^3}$,

wo Δ_1, Δ_2, Δ_3 die Projectionen des Elementardreiecks LMN auf die drei coordinirten Ebenen sind (§. 324.). Es ist aber, wenn wir dieses Dreieck $LMN = \Delta$ setzen, und wenn r den Krümmungshalbmesser der Curve in M bedeutet: $r = -ds^3 : 2\Delta$ (§. 319.), und wir können daher letztere drei Gleichungen auch also schreiben:

$$(B)\quad m = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\Delta_1}{\Delta}, -Ax = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\Delta_2}{\Delta}, Ay = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Aus ihnen lassen sich nachstehende merkwürdige Eigenschaften der elastischen Linie im Raume (vergl. §. 320.) herleiten. — Die jetzige Axe der x oder diejenige Gerade, welche rücksichtlich der auf das erste Element der Curve wirkenden Kräfte die Hauptlinie des Systems ist (§. 82.), heisse vorzugsweise die Axe der Curve. Nun ist Δ_1 die Projection des Dreiecks Δ auf die Ebene der y, z, folglich $\Delta_1 : \Delta$ = dem Cosinus des Winkels, den die Ebene des Dreiecks Δ mit der Ebene der y, z macht, $= \sin\chi$, wenn

dius Vector an ihr fortbewegt, steht zu der Fläche, welche die Projection des Radius auf eine die Axe rechtwinklig treffende Ebene beschreibt, in einem constanten Verhältnisse, — in dem nämlichen, welches die Cotangente des Winkels, den die Krümmungsebene in irgend einem Punkte mit der Axe bildet, zu dem Abstande des Punktes von der Axe hat.

In dem besonderen Falle, wenn $m = 0$, und wenn daher die auf das erste Element wirkenden Kräfte auf eine einzige Kraft A zurückgeführt werden können, wird zu Folge der Gleichung (e): $ydx - xdy = 0$, und daher $y = ax$, d. h. die Curve ist in einer die Axe und somit die Richtung der Kraft A enthaltenden Ebene begriffen. Ihre Krümmung im Punkte (x, y, z) ist alsdann, wie die Gleichung (b) lehrt, und wie wir bereits aus §. 320. wissen, proportional mit $\sqrt{(y^2 + z^2)}$ d. h. mit dem Abstande des Punktes von der Axe.

Wenn dagegen die am ersten Elemente anzubringenden Kräfte auf ein Paar reducirbar sind, und somit $A = 0$ ist, so gehen die Gleichungen (b) und (e) über in $m = \varepsilon : r$ und $mdx = 0$ oder $x = \text{Const.}$, d. h. die Curve liegt in einer mit der Ebene des Paares parallelen oder zusammenfallenden Ebene, was nach §. 50. auf eines und dasselbe hinauskommt, und die Krümmung ist unveränderlich, die Curve selbst also ein Kreis, — übereinstimmend mit dem bereits in §. 323. Gefundenen.

§. 327.

Statt der drei Gleichungen (A) können auch die zwei (b) und (e) als die Gleichungen der elastischen Linie im Raume angesehen werden. Kennt man daher

net die Curve irgendwo der Axe, so ist daselbst die Krümmung am schwächsten (jedoch nicht null, wie in §. 220.), und die Krümmungsebene, folglich auch die Curve selbst, auf der Axe normal. — Parallel mit der Axe kann die Curve erst in unendlicher Entfernung von der Axe werden. Denn wird es die Curve, so wird auch die Krümmungsebene mit der Axe parallel, folglich $\gamma = 0$, folglich nach (a) $r = 0$ und nach (b) $y^4 + z^4 = \infty$.

Dasselbe fliesst auch unmittelbar aus der Gleichung (d), welche zu erkennen giebt, *dass der Abstand eines Punktes der Curve von der Axe der Cotangente des Winkels der Krümmungsebene mit der Axe proportional ist.*

Man multiplicire noch die 3 Gleichungen (A) resp. mit dx, dy, dz und addire sie, so erhält man:

$$(e) \quad mdx + A(ydx - xdy) = 0.$$

Sind nun F, G zwei Punkte der Curve, F', G' ihre Projectionen auf die Axe der x und F_1, G_1 ihre Projectionen auf die Ebene der y, z, und ist O der Durchschnitt jener Axe mit dieser Ebene, so kommt, wenn man die Gleichung (e) von F bis G integrirt:

$$m \cdot F'G' + A \cdot OF_1G_1 = 0,$$

wo OF_1G_1 die Fläche in der Ebene der y, z vorstellt, welche von den Geraden OF_1, OG_1 und der Projection F_1G_1 des Bogens FG der Curve begrenzt wird. Indem wir uns daher die Curve durch den einen Endpunkt F einer sich an der Axe rechtwinklig fortbewegenden und um sie sich zugleich drehenden Geraden $F'F$ erzeugt denken und diese Gerade den Radius Vector nennen, können wir die erhaltene Gleichung also aussprechen:

Jeder Theil der Axe, um welchen sich der Ra-

$$y = a\cos\frac{2\pi x}{b},\quad z = a\sin\frac{2\pi x}{b}.$$

Hieraus fliesst durch Differentiation

$$dy = -\frac{2\pi z}{b}dx,\quad dz = \frac{2\pi y}{b}dx,$$

folglich $ds = \frac{l}{b}dx$, wo $l = \sqrt{(b^2 + 4\pi^2 a^2)}$

= dem, während einer ganzen Umdrehung des Radius, erzeugten Theile der Spirale.

Durch nochmalige Differentiation, wobei wir dx, wie bei den Gleichungen (A), constant setzen, erhalten wir:

$$d^2y = -\frac{4\pi^2 y}{b^2}dx^2,\quad d^2z = -\frac{4\pi^2 z}{b^2}dx^2.$$

Substituiren wir nun diese Werthe von y und z und ihren Differentialen in den 3 Gleichungen (A), so giebt die erste derselben:

$$m = -\frac{8\pi^3 \varepsilon a^2}{l^3};$$

jede der beiden andern aber giebt:

$$A = \frac{4\pi^2 \varepsilon b}{l^3};$$

und hiermit sind die Relationen zwischen den Kräften und den Parametern der Curve gefunden.

Der hierbei sich negativ ergebende Werth von m zeigt an, dass der Sinn dieses Moments dem Sinne, nach welchem der Winkel der Axe der z mit der der y, $= 90°$ ist, also auch dem Sinne, nach welchem die Drehung des Radius bei einem positiven Fortrücken an der Axe der x geschieht, entgegengesetzt seyn muss. Denken wir uns daher diese Axe etwa vertical, und windet sich die Spirale nach oben zu von rechts nach links um die Axe, und wird ihr unterstes Element als

eine Linie, welche diesen zwei Gleichungen Genüge leistet, so wird sie eine elastische seyn und die Axe der x zu ihrer Axe haben.

So wird unter anderen hierher die cylindrische Spirale oder die Schraubenlinie gehören, und die Axe des Cylinders wird die Axe der Curve seyn. Denn erstens ist der Abstand jedes Punktes dieser Spirale von der Axe von gleicher Grösse, desgleichen auch die Krümmung constant, und hiermit wird die Gleichung (b) erfüllt. Da ferner eine cylindrische Spirale von dem Endpunkte eines auf der Axe normal stehenden Radius beschrieben wird, wenn derselbe um die Axe gedreht und zugleich längs der Axe fortgerückt wird, so dass seine Fortrückung der gleichzeitigen Drehung immer proportional ist, so geschieht auch der durch die Gleichung (e) ausgedrückten Bedingung Genüge.

Ist eine Spirale ihrer Form und Grösse nach gegeben und sollen die zu ihrer Erhaltung nöthigen Kräfte gefunden werden, oder soll umgekehrt aus den Kräften die Form und Grösse der Spirale bestimmt werden, so hat man nur die Gleichungen (A) der elastischen Linie mit denen der Spirale in Verbindung zu setzen. Sey zu dem Ende a der Halbmesser des Cylinders der Spirale, oder die Länge des vorhin gedachten Radius Vector und b der Weg, um welchen derselbe an der Axe während einer ganzen Umdrehung fortrückt. Wird nun diese Axe zur Axe der x genommen, und geschieht bei einem Fortrücken nach der positiven Seite dieser Axe die gleichzeitige Drehung in dem Sinne, nach welchem die Axe der z mit der der y einen Winkel $= 90°$, nicht $= 270°$, macht, so sind die Gleichungen der Spirale:

das Moment der Kräfte A, B, $-B$ in Bezug auf jedes Element der Curve $= 0$ ist.

Um endlich noch der Spannung der Spirale zu gedenken, so ist sie, weil $\int X ds = A$, $\int Y ds = 0$ und $\int Z ds = 0$ sind;

$$T = -A\frac{dx}{ds} = -A\frac{b}{l},$$

also von einem Punkte der Curve zum andern constant und wegen des negativen Zeichens keine eigentliche Spannung, sondern eine Pressung.

---

§. 328.

Ehe ich die Lehre vom Gleichgewichte an einem elastisch biegsamen Faden verlasse, will ich noch zeigen, wie die Sätze, welche in der Dynamik das Princip der lebendigen Kräfte und das Princip der kleinsten Wirkung heissen und in §. 305. auf das Gleichgewicht an einem vollkommen biegsamen Faden übergetragen wurden, mit gehöriger Modification auch auf einen elastisch biegsamen Faden angewendet werden können, wobei ich mich aber, um nicht eine allzulange Rechnung herbeizuführen, auf den Fall beschränken werde, wenn der Faden und die auf ihn wirkenden Kräfte in einer Ebene enthalten sind.

Für diesen Fall ist die Gleichung für's Gleichgewicht:

$$\int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = \varepsilon p \quad (\S.\ 319.),$$

wo p das Reciproke des Krümmungshalbmessers r bedeutet; die Gleichung für die Spannung aber ist:

$$dx \int X ds + dy \int Y ds = -T ds \quad (\S.\ 318.\ e.).$$

Man setze [1] $dx = \xi ds$, $dy = \eta ds$, $dp = \varrho ds$,

wo daher $\xi^2 + \eta^2 = 1$ und $\xi d\xi + \eta d\eta = 0$,

das erste betrachtet, als dasjenige also, mit welchem die einfache Kraft A und die Kräfte des Paares in Verbindung gesetzt sind, so muss die mit der Axe zusammenfallende Kraft A nach oben, und der Sinn des horizontalen Paares von der Linken nach der Rechten gerichtet seyn.

Aus den für A und m erhaltenen Werthen fliesst die Proportion:

$$-m : A = 2\pi a^2 : b.$$

Sie giebt zu erkennen, dass, wenn man die in der Axe wirkende Kraft A geometrisch durch den vom Radius a während einer Umdrehung längs der Axe zurückgelegten Weg b ausdrückt, das Moment m des normal auf der Axe wirkenden Paares durch das Doppelte der auf der Axe normalen Basis des Cylinders vorgestellt wird.

Macht man die Breite des Paares $= a$ und setzt $m : a = B$, so dass $+B$ und $-B$ die Kräfte des Paares sind, so wird

$$-B : A = 2\pi a : b = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx.$$

Man kann alsdann dem Paare eine solche Lage geben, dass seine Kräfte auf einem Radius in den zwei Endpunkten desselben perpendicular stehen, dass also die eine Kraft $+B$ irgend einem Elemente der Curve und die andere $-B$ der Axe, also auch der Kraft A, begegnet. Zufolge der letztern Proportion werden sich dann $-B$ und A zu einer mit dem Elemente parallelen Kraft zusammensetzen lassen, also zu einer Kraft, deren Moment in Bezug auf das Element null ist. Da nun auch die dem Elemente begegnende Kraft $+B$ rücksichtlich desselben ein Moment $= 0$ hat, so erhellet auf diese Weise ganz einfach, dass, wie wir bereits aus §. 325. *b.* schliessen können,

Dies ist der erste der hier zu beweisenden Sätze. Um den zweiten zu entwickeln, welcher dem Princip der kleinsten Wirkung entspricht, denke man sich in der Ebene des Fadens von einem beliebigen Punkte M_1 der Ebene bis zu einem andern beliebigen M_2 irgend eine Curve gezogen. Unter der abermaligen Voraussetzung, dass $Xdx + Ydy$ das Differential einer gegebenen Function V von x und y ist, werde für jeden Punkt (x, y) dieser Curve mit Hülfe ihres Krümmungshalbmessers $1 : p$ in (x, y) der Werth von T nach der Gleichung I., in welcher man die auf den Punkt (x', y') des Fadens sich beziehenden V', T', p' als gegebene Constanten ansehe, berechnet, und damit das Integral $\int T ds$ von M_1 bis M_2 gebildet. Man lasse nun die Curve sich um ein unendlich Weniges ändern und untersuche die Aenderung $\delta \int T ds$, welche dadurch das Integral erfährt.

Nach I. ist $\delta T = -\delta V - \varepsilon p \delta p$

$= -X\delta x - Y\delta y - \varepsilon p \delta p$ (vgl. §. 305.)

und daher $\delta\,(Tds) = \delta T \,.\, ds + T\delta ds$

$= -Xds\delta x - Yds\delta y - \varepsilon pds\delta p$

$+ T\xi d\delta x + T\eta d\delta y$ (ebendas.).

Hiervon das Integral von M_1 bis M_2 genommen, giebt, weil $\int \delta\,(Tds) = \delta \int Tds$ ist, die gesuchte Aenderung.

Nehmen wir jetzt an, die zu variirende Curve sey der im Gleichgewichte befindliche elastische Faden selbst, also M_1 und M_2 zwei Punkte desselben. Für den Faden haben Xds und Yds die aus [2] durch Differentiation sich ergebenden Werthe, und es wird damit

$$\delta(Tds) = d(T\xi - \varepsilon\varrho\eta) \,.\, \delta x + d(T\eta + \varepsilon\varrho\xi) \,.\, \delta y$$
$$- \varepsilon pds\delta p + T\xi d\delta x + T\eta d\delta y$$

$$= d(T\xi\delta x) + d(T\eta\delta y) + \varepsilon\Omega,$$

wo $\Omega = -d(\varrho\eta)\,\delta x + d(\varrho\xi)\,\delta y - pds\delta p$

$$= -d(\varrho\eta\delta x) + d(\varrho\xi\delta y) + \Psi,$$

wo $\Psi = \varrho\eta\delta dx - \varrho\xi\delta dy - pds\delta p.$

Nach den Formeln [3] ist aber

$$\eta\delta dx - \xi\delta dy = \sin\psi\,\delta(\cos\psi\,ds) - \cos\psi\,\delta(\sin\psi\,ds)$$

$$= -ds.\delta\psi;\ \text{folglich nach [1] und [4]}$$

$$\Psi = -dp\delta\psi + d\psi\delta p = -d(p\delta\psi) + \delta(pd\psi)$$

$$= -d(p\delta\psi) - \delta(p^2 ds).$$

Hiermit wird, wenn man

$$T\xi - \varepsilon\varrho\eta = F \text{ und } T\eta + \varepsilon\varrho\xi = G \text{ setzt:}$$

$$\delta(Tds) = d(F\delta x) + d(G\delta y) - \varepsilon d(p\delta\psi) - \varepsilon\delta(p^2 ds);$$

und wenn man vom Punkte M_1 bis zum Punkte M_2 der Fadencurve integrirt und den Werth von

$$F\delta x + G\delta y - \varepsilon p\delta\psi$$

in M_1, $= A_1$ und in M_2, $= A_2$ setzt:

$$\delta\int(Tds + \varepsilon p^2 ds) = A_2 - A_1.$$

Werde nun angenommen, dass bei der Variation des Stücks $M_1\,M_2$ der Fadencurve die Punkte M_1 und M_2 ihre Oerter unverändert behalten, und dass daher δx und δy für jeden der beiden Punkte null sind. Werde ferner gesetzt, dass die variirte Curve mit der ursprünglichen in M_1 und M_2 einerlei Tangenten habe, so ist auch $\delta\psi$, als die Variation des Winkels der Tangente mit der Axe der x, an beiden Orten null. Hiermit werden die Grössen A_1 und A_2, welche von den Werthen der Variationen δx, δy und $\delta\psi$ in M_1 und M_2 abhängen, gleichfalls null, und die zuletzt erhaltene Gleichung reducirt sich auf

$$\text{II.}\quad \delta\int(Tds + \varepsilon p^2 ds) = 0, \text{ d. h.}$$

Sind Kräfte (X, Y) *an einem elastisch biegsamen Faden im Gleichgewichte, und ist* $Xdx + Ydy$ *das vollständige Differential einer Function* V *von*

x und y, so ist es unter allen Curven, welche von einem beliebigen Punkte M_1 des Fadens bis zu einem beliebigen andern M_2 desselben gezogen werden und in M_1 und M_2 den Faden zugleich berühren, die zwischen M_1 und M_2 enthaltene Fadencurve selbst, für welche das von M_1 bis M_2 ausgedehnte Integral

$$\int\left(Tds+\varepsilon\frac{ds}{r^2}\right)$$

seinen grössten oder kleinsten Werth hat. Dabei ist T mit Hülfe der Gleichung

$$V-V'+T-T'+\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r'^2}\right)=0$$

zu berechnen, wo V', T' und r' die irgend einem Punkte der Fadencurve zugehörigen Werthe der Function V, der Spannung und des Krümmungshalbmessers bedeuten.

§. 329.

Zusätze. *a.* Sind X und Y null, wirken also auf den Faden keine Kräfte, sondern sind bloss das erste und letzte Element in gegebenen Lagen befestigt, so ist V constant, also $V=V'$ und

$$T-T'+\tfrac{1}{2}\varepsilon(p^2-p'^2)=0, \text{ d. h.}$$

Bei der elastischen Linie (§. 320.) *ist der Unterschied der Spannungen in irgend zwei Punkten dem Unterschiede der Quadrate der Reciproken der Krümmungshalbmesser in den beiden Punkten proportional.*

b. Substituirt man den aus letzterer Gleichung sich ergebenden Werth von T in dem Integrale, welches ein Maximum oder Minimum ist, so wird dasselbe

$$=\int(T'+\tfrac{1}{2}\varepsilon(p^2+p'^2))ds=Cl+\tfrac{1}{2}\varepsilon\int p^2 ds,$$

wo $C=$ der constanten Grösse $T'+\frac{1}{2}\varepsilon p'^2$, und $l=$

der Länge der von M_1 bis M_2 gezogenen Curve. Wird folglich noch die Bedingung hinzugefügt, dass l constant, dass also alle von M_1 bis M_2 gezogenen Curven von gleicher Länge seyn sollen, so wird $\int p^2 ds$ selbst ein Minimum, — nicht ein Maximum, weil hier das Integral mit der Länge der Curve offenbar über jede Grenze hinaus wachsen kann. — Wir gelangen hiermit zu dem merkwürdigen schon von Daniel Bernoulli *) entdeckten Satze:

Unter allen Linien von gleicher Länge, welche von einem gegebenen Punkte zu einem andern gegebenen gezogen werden und in diesen Punkten von Geraden, die ihrer Lage nach gegeben sind, berührt werden, ist es die elastische Linie, für welche das von dem einen zum andern Punkte ausgedehnte Integral des durch das Quadrat des Krümmungshalbmessers dividirten Linienelements seinen kleinsten Werth hat.

c. In den bisherigen Untersuchungen über den elastisch biegsamen Faden ist in Uebereinstimmung mit Allen, welche über diesen Gegenstand geschrieben haben, das Moment der Elasticität u an jeder Stelle des Fadens der Krümmung daselbst proportional gesetzt worden, indem dieses nicht allein die einfachste, sondern auch eine mit der Erfahrung gut harmonirende Hypothese ist (§. 319.). Ohne die Erfahrung näher zu

*) Siehe den Eingang zu der bereits in §. 323. angeführten Euler'schen Abhandlung de curvis elasticis. Euler berichtet daselbst, wie Bernoulli ihm mitgetheilt habe, dass er die gesammte in einem elastischen Bleche (lamina) enthaltene Kraft in dem einfachen Ausdrucke $\int(ds : r^2)$ zusammenfassen könne, und dass dieser Ausdruck, welchen er die vis potentialis des Bleches nennt, für die elastische Linie ein Minimum seyn müsse.

befragen, kann man bloss behaupten, dass das Moment u eine Function der Krümmung ist, und zwar eine solche, die mit der Krümmung zugleich wächst und abnimmt und durch Null in das Entgegengesetzte übergeht. Denn unter der Annahme, dass alle Elemente des Fadens von gleicher Länge sind, kann das Moment u des von den Richtungen zweier nächstfolgenden Elemente gebildeten Winkels $d\psi$ von diesem Winkel allein abhängig seyn; und da u eine endliche Grösse, ds aber constant gesetzt worden ist, so muss u eine Function von $d\psi : du$, d. i. von der Krümmung, seyn. Dass aber u mit der Krümmung zugleich ab- und zunehmen muss u. s. w., folgt aus der Natur der Sache selbst.

Ich mache diese Bemerkung hier um deswillen, weil, wie ich noch hinzufügen will, die im vor. §. angestellte Rechnung auch unter der Voraussetzung, dass das Moment u überhaupt eine Function der Krümmung, also von r oder von $p, = 1 : r$, ist, geführt werden kann.

In der That stelle P irgend eine gegebene Function von p vor, und sey dem gemäss die allgemeinere Gleichung für das Gleichgewicht am elastischen Faden:

$$\int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = P.$$

Alsdann werden, wenn man $dP = \Pi dp$ setzt, die Gleichungen [2]:

$$\int X ds = -T\xi + \Pi\varrho\eta,$$
$$\int Y ds = -T\eta - \Pi\varrho\xi.$$

Verbindet man diese Gleichungen auf die oben angezeigte Weise und setzt $\int \Pi p dp = Q$, und den Werth, welchen Q für $x = x'$ und $y = y'$ erlangt, $= Q'$, so erhält man statt der Gleichung I.:

$$V - V' + T - T' + Q - Q' = 0,$$

und man kann daher auch jetzt noch die Spannung T schon durch die Function V und durch den Krümmungshalbmesser, von welchem Q eine gegebene Function ist, bestimmen.

Eine weitere analoge Durchführung der Rechnung giebt mit der Bemerkung, dass $\delta Q = \Pi p \delta p$ und $\delta P = \Pi \delta p$ ist:

$$\Psi = -dP\delta\psi + \delta P d\psi = -d(P\delta\psi) + \delta(Pd\psi)$$
$$= -d(P\delta\psi) - \delta(Ppds),$$

und man gelangt damit zu dem Integrale

$$\int(Tds + Ppds),$$

welches unter den nämlichen Voraussetzungen, welche im vor. §. gemacht wurden, ein Maximum oder Minimum seyn muss.

Gleichgewicht an einem elastisch drehbaren Faden.

§. 330.

Eine krumme Linie im Raume können wir ihrer Grösse und Form nach als gegeben ansehen, wenn die Längen ihrer Elemente, die Winkel je zweier nächstfolgenden Elemente und die Winkel, welche die Ebenen von je zwei nächstfolgenden der erstern Winkel mit einander machen, gegeben sind. Von diesen drei, zur Bestimmung einer Linie von doppelter Krümmung dienenden Arten von Grössen setzten wir in diesem Kapitel zuerst alle drei veränderlich und liessen durch die Veränderung der Längen der Elemente elastische Kräfte entstehen (§. 313—315.). Wir setzten zweitens die Längen der Elemente constant, und nur die beiden Arten von Winkeln veränderlich, und liessen durch die Aenderung der Winkel der ersten Art elastische Kräfte erzeugt werden (§. 316—§. 329.).

Auf diesem Wege fortgehend, wollen wir nun drittens und letztens die Längen der Elemente sowohl, als die Winkel der ersten Art, constant und nur die der zweiten Art als veränderlich annehmen und durch ihre Veränderung elastische Kräfte hervorgehen lassen. So wie wir aber bei der zuletzt geführten Untersuchung der Einfachheit willen die Winkel der ersten Art beim anfänglichen Zustande der Linie sämmtlich null setzten und damit die Linie eine Gerade seyn liessen, so wollen wir auch jetzt, so lange auf die Linie noch keine Kräfte wirken, die Winkel der zweiten Art null annehmen und somit eine Curve von einfacher Krümmung voraussetzen.

Sind demnach L, M, N, O irgend vier zunächst auf einander folgende Punkte der Curve, also LM, MN, NO drei nächstfolgende Elemente derselben und LMN, MNO zwei nächstfolgende Winkel der ersten Art, so sollen die ursprünglich zusammenfallenden Ebenen derselben, wenn sie, durch äussere Kräfte genöthigt, an ihrem gemeinschaftlichen Elemente MN einen Winkel (der zweiten Art) mit einander machen, durch elastische Kräfte zur Wiedervereinigung getrieben werden. Entfernt man die äussern Kräfte und soll nichtsdestoweniger der Ebenenwinkel unverändert erhalten werden, so kann dieses dadurch geschehen, dass man irgend zwei Punkte, etwa L und O, der einen und andern Ebene, von denen keiner in dem gemeinschaftlichen Elemente MN liegt, durch eine steife gerade Linie LO von unveränderlicher Länge mit einander verbindet; denn hierdurch werden die beiden Ebenen in eine unveränderliche Lage gegen einander gebracht. Den elastischen Kräften halten daher die Pressungen der Linie LO das Gleichgewicht, und man kann

sich folglich die elastischen Kräfte als zwei einander gleiche, nach den Richtungen LO und OL auf die Ebenen LMN und MNO wirkende, Kräfte vorstellen, und eben so als zwei nach $L'O'$ und $O'L'$ gerichtete Kräfte, wenn L' und O' irgend zwei andere Punkte in den Ebenen LMN und MNO sind. Heissen nun p und $-p$ die beiden erstern und p' und $-p'$ die beiden letztern Kräfte, so müssen nach demselben Schlusse, wie in §. 316., wenn das Element MN unbeweglich angenommen wird, die Kräfte p und p', welche nach den Richtungen LO und $L'O'$ auf die um MN drehbare Ebene LMN wirken, gleichwirkend seyn; es müssen folglich die Momente von p und p' in Bezug auf MN, als Axe, einander gleich seyn. Die gemeinschaftliche Grösse dieser Momente wollen wir das Moment der Elasticität des Ebenenwinkels $LMN\hat{}MNO$ nennen und, wenn die Länge der Axe $= 1$ ist, mit mit v bezeichnen. Kennt man dieses Moment, so kann man für jede gegebene Richtung der Kraft p oder p' die Intensität der letztern finden. Denn das Moment einer ihrer Grösse und Richtung nach durch LO ausgedrückten Kraft in Bezug auf die Linie MN, als Axe, ist gleich dem Sechsfachen der Pyramide $MNLO$ (§. 59.) $= LMNO$ (§. 63. 1.), und daher nach §. 91. das Moment einer nach LO gerichteten Kraft p in Bezug auf eine Axe, welche die Richtung MN und eine Länge $= 1$ hat:

$$v = \frac{6.LMNO}{LO.MN}p, \text{ folglich } p = \frac{LO.MN}{6.LMNO} \cdot v.$$

Eben so, wie bei dem Linienwinkel in §. 316., ist demnach auch hier mit dem Momente der Elasticität die Wirkung derselben vollkommen bestimmt.

Was zuletzt noch die Grösse des Moments v an-

langt, so ist wohl auch hier die naturgemässeste Hypothese, dasselbe bei einem gleichförmig elastischen Faden, sobald die Elemente desselben einander gleich angenommen werden, dem mehrgedachten Ebenenwinkel proportional zu setzen, also überhaupt, — mag ds constant angenommen werden, oder nicht —

$$v = \vartheta \frac{d\chi}{ds}$$

zu setzen, wenn $d\chi$ den unendlich kleinen Ebenenwinkel und ϑ eine von der Elasticität des Fadens abhängige Constante bezeichnet.

Weil endlich

$$6 . LMNO = 2LMN . \frac{2MNO}{MN} . \sin LMN^{\wedge} MNO$$

$$= 4 . \frac{LMN^2}{ds} d\chi = 4LMN^2 . \frac{v}{\vartheta},$$

so kann nach derselben Hypothese das Moment v auch

$$= \vartheta . 6LMNO : 4LMN^2$$

gesetzt werden. Dabei ist ϑ eine positive Grösse, weil das Moment ϑ mit der Pyramide $LMNO$ einerlei Zeichen hat.

§. 331.

Dieses vorausgeschickt, gehen wir jetzt zur Entwickelung der unser Problem in Rechnung setzenden Differentialgleichungen über. Hierbei wollen wir, wie bei der vorigen Untersuchung, die in §. 281. *b.* aufgestellten Gleichungen für das Gleichgewicht eines vollkommen biegsamen Fadens zum Grunde legen. Diese vollkommene Biegsamkeit wird gegenwärtig durch die zwei Bedingungen beschränkt, dass die im vor. §. sogenannten Winkel der ersten Art unveränderlich und dass die der zweiten Art elastisch seyn sollen, und

wir haben desshalb zu den in jenen Gleichungen bereits vorkommenden Kräften noch zweierlei andere Kräfte hinzuzufügen. Damit aber diese neuen Kräfte, gleich den bereits vorkommenden, den Faden selbst afficiren und somit auf eben die Art, wie jene, in Rechnung genommen werden können, wollen wir die Unveränderlichkeit der Winkel der ersten Art uns dadurch bewerkstelligt denken, dass von je drei nächstfolgenden Punkten des Fadens, wie L, M, N, der erste mit dem dritten durch eine gerade Linie LN von unveränderlicher Länge verbunden ist. Die Elasticität der Winkel der zweiten Art oder der Ebenenwinkel wollen wir, den vorangegangenen Erläuterungen gemäss, als darin bestehend uns vorstellen, dass auf den ersten und vierten von je vier nächstfolgenden Punkten, wie L, M, N, O, zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte wirken. Die Kräfte, welche gegenwärtig am Faden sich das Gleichgewicht halten sollen, sind demnach:

1) Die äusseren Kräfte (Xds, Yds, Zds), welche auf die einzelnen Elemente LM, MN, NO, ... wirken, und wohin auch die endlichen Kräfte gehören, die am Anfang und Ende des Fadens thätig sind;

2) die Pressungen, welche von den steifen Geraden LN, MO,... auf die sie begrenzenden Punkte des Fadens hervorgebracht werden;

3) die elastischen Kräfte, deren Richtungen in LO,... fallen.

Den allgemeinen Gleichungen in §. 281. zufolge ist nun zunächst analytisch auszudrücken, dass in Bezug auf jede der drei Axen, welche durch irgend einen Punkt (x, y, z) oder M des Fadens parallel mit den

Coordinatenaxen gelegt werden, das Moment aller jener vom Anfangspunkte A bis zum Punkte M auf den Faden wirkenden Kräfte null ist. Auf solche Weise erhalten wir drei Gleichungen, oder vielmehr nur zwei, da aus je zweien derselben, nachdem sie differentiirt worden, die dritte folgt.

Von allen auf den Faden von A bis M wirkenden Pressungen sind aber zwei und zwei einander gleich und direct entgegengesetzt, die zwei ausgenommen, welche die Punkte L und M nach den Richtungen LN und MO treiben, indem die ihnen entgegengesetzten auf die nicht mehr zum Theil AM des Fadens gehörigen Punkte N und O wirken; und weil die nach MO gerichtete Pressung jeder durch M gelegten Axe begegnet, so reducirt sich in Bezug auf eine solche Axe das Moment aller jener Pressungen auf das Moment der nach LN gerichteten Pressung allein. Wir wollen die Momente dieser Pressung in Bezug auf die drei durch M mit den Axen der x, y, z parallel gelegten Axen resp. $= p$, q, r setzen.

Ganz auf dieselbe Weise kommen, wenn K der dem L nächstvorangehende Punkt ist, die Momente aller elastischen Kräfte von A bis M auf die Momente der zwei auf K und L nach KN und LO gerichteten Kräfte zurück. Heissen rücksichtlich jener drei Axen die Momente der erstern dieser zwei Kräfte: f_1, g_1, h_1, der letztern: f, g, h. Alsdann sind, wenn wir noch die Momente der äussern Kräfte von A bis M rücksichtlich derselben drei Axen kurz mit (X), (Y), (Z) bezeichnen, die vorhin gedachten drei Gleichungen:

$$(a)\quad \begin{cases} (X)+p+f_1+f=0, \\ (Y)+q+g_1+g=0, \\ (Z)+r+h_1+h=0, \end{cases}$$

und es ist nur noch übrig, aus diesen Gleichungen die die Werthe von p, q, r bestimmende Pressung zu eliminiren. Die zwei Gleichungen, welche dadurch hervorgehen, findet man am leichtesten, wenn man jene drei addirt, nachdem man sie das einemal mit den Cosinussen $\xi_,$, $\eta_,$, ζ der Winkel multiplicirt hat, welche das Element LM mit den Coordinatenaxen macht, und das anderemal mit den Cosinussen ξ, η, ζ der Winkel des Elements MN mit denselben drei Axen. Man erhält auf diese Weise:

$$(b)\quad \begin{cases} (X)\xi_, + (Y)\eta_, + (Z)\zeta_, + f_,\xi_, + g_,\eta_, + h_,\zeta_, = 0, \\ (X)\xi + (Y)\eta + (Z)\zeta + f\xi + g\eta + h\zeta = 0. \end{cases}$$

Denn die Aggregate $p\xi_, + q\eta_, + r\zeta_,$ und $f\xi_, + g\eta_, + h\zeta_,$ sind nach §. 90. die auf LM, als Axe, bezogenen Momente der nach LN gerichteten Pressung und der elastischen nach LO gerichteten Kraft, und jedes dieser beiden Momente ist null, weil die Axe LM den Richtungen der Pressung und der elastischen Kraft, in L, begegnet; und eben so erhellet, dass auch $p\xi + q\eta + r\zeta$ und $f_,\xi + g_,\eta + h_,\zeta$, als die Momente der Pressung nach LN und der elastischen nach KN gerichteten Kraft, in Bezug auf MN, als Axe, null sind.

Von den zwei Gleichungen (b) selbst drückt die erste aus, dass das Moment aller auf den Faden von A bis L (oder M) wirkenden Kräfte rücksichtlich des Elements LM, als Axe, null ist, und die zweite, dass das Moment aller Kräfte von A bis M (oder N) rücksichtlich der Axe MN null ist. Beide Gleichungen drücken daher eines und dasselbe, nur in Bezug auf zwei verschiedene Punkte der Curve, aus, und da diese zwei Punkte einander unendlich nahe liegen, so muss sich die eine dieser Gleichungen durch Differentiation

der andern ergeben. Durch die Elimination der Pressung aus (*a*) haben wir daher, genau betrachtet, nur Eine Gleichung erhalten; auch war dieses leicht vorauszusehen, da von den drei Gleichungen (*a*), nachdem sie differentiirt worden, eine jede eine Folge der beiden andern ist.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, in einer der beiden Gleichungen (*b*), wozu wir die zweite wählen, für die darin vorkommenden Momente ihre uns schon bekannten Werthe zu substituiren. Es ist nämlich

$(X) = \int dx \int Y ds - \int dy \int Z ds$, $(Y) =$ etc. (§. 281. *b*.)

Ferner ist $f\xi + g\eta + h\zeta =$ dem Momente v der elastischen nach LO gerichteten Kraft in Bezug auf eine nach MN gerichtete Axe,

$= \vartheta \,.\, 6LMNO : 4LMN^2$ (vor. §.).

Aus der analytischen Geometrie weiss man aber, dass

$$6LMNO = (dyd^2z - dzd^2y)\,d^3x + (dzd^2x - dxd^2z)d^3y + (dxd^2y - dyd^2x)d^3z \;^*)$$

und $4LMN^2 = 4(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2)^2$ (§. 324.)

$$= (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2.$$

Endlich ist $\xi = dx : ds$, etc. und es wird daher, wenn man noch der Einfachheit willen dx constant annimmt, die gesuchte Gleichung fürs Gleichgewicht:

$$dx \int (dx \int Y ds - dy \int Z ds) + dy \int (dx \int Z ds - dx \int X ds) + dz \int (dy \int X ds - dx \int Y ds) = \vartheta ds \frac{dx(d^2x d^2y - d^2y d^2x)}{(dzd^2y - dyd^2z)^2 + dx^2(d^2y^2 + d^2z^2)}.$$

Mit dieser Gleichung ist aber noch die Bedingung

*) Auch kann dieser Ausdruck leicht aus dem in §. 64. durch die Coordinaten ihrer Ecken ausgedrückten Werthe einer Pyramide hergeleitet werden.

zu verbinden, dass die Curve von doppelter Krümmung, zu welcher die ebene Curve gedreht worden, in jedem ihrer Punkte denselben Krümmungshalbmesser r hat, als die ebene Curve in dem entsprechenden Punkte; d. h. man hat zu der letztern Gleichung noch die zwischen r und s bei der ebenen Curve statt findende Gleichung, als eine auch bei der doppelt gekrümmten geltende, hinzuzufügen. Zu dem Ende bestimme man, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der ebenen Curve ist, aus dieser Gleichung das Verhältniss $ds : dx$ und r, als Functionen von x. Hiermit findet sich auch das Verhältniss $\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dx} : \frac{ds}{dx}$, als Function von x. Man eliminire hierauf x aus den Werthen von r und $dr:ds$, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen r und $dr:ds$, in welcher nur noch für ds, r und dr ihre allgemeinen Werthe, durch die ersten, zweiten und dritten Differentiale von x, y, z ausgedrückt, zu substituiren sind.

Ist z. B. die gegebene Curve ein Kreis, dessen Halbmesser $= a$, so hat man die Bedingungsgleichung

$$a = \frac{ds^3}{\sqrt{[(dxd^2y - dyd^2x)^2 + \ldots]}}.$$

Durch diese zweite Gleichung, in Verbindung mit der vorhin entwickelten Momentengleichung, ist aber, sobald noch X, Y, Z gegebene Functionen von x, y, z sind, die Beschaffenheit der Curve bestimmt.

§. 332.

Zusätze. *a.* Die Herleitung der zwei endlichen Gleichungen zwischen x, y, z aus den zwei Differentialgleichungen des vor. §. erfordert 12 Integrationen

und führt damit 12 willkührliche Constanten herbei. Denn zuerst hat man die 3 Integrale $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$ mit 3 willkührlichen Constanten. Hierzu kommen durch Integration der 3 Ausdrücke: $dz \int Y ds - dy \int Z ds$, etc. 3 neue Constanten; und da von den Integralen dieser Ausdrücke, nachdem sie resp. mit dx, dy, dz multiplicirt worden, die Summe einem Ausdrucke gleich zu setzen ist, welcher Differentiale der 1sten bis 3ten Ordnung enthält, so kommen bei vollständiger Integration dieser ersten Differentialgleichung noch 3 neue Constanten hinzu. Diese 9 Constanten werden aber durch Integration der zweiten Gleichung, welche von der 3ten Ordnung im Allgemeinen ist, (nur für den Kreis von der 2ten) noch um 3 vermehrt, so dass die Anzahl sämmtlicher Constanten auf 12 steigt.

Sind demnach eine ebene Curve, zwei Punkte A' und B' in derselben und die Oerter A und B gegeben, welche diese Punkte im Raume einnehmen, nachdem die Curve unter dem Einflusse äusserer Kräfte und ihrer eigenen mit der zweiten Krümmung verbundenen Elasticität eine zweite Krümmung erhalten hat, sind ferner in diesen zwei Oertern noch die Tangenten und die Krümmungsebenen der doppelt gekrümmten Curve gegeben, so ist damit letztere Curve selbst vollkommen bestimmt. — Denn eben so gross, als die Zahl (zwölf) der willkührlichen Constanten, ist auch die Zahl der Gleichungen, welche zwischen den Constanten in den zwei Gleichungen der Curve erfüllt seyn müssen, wenn diese die eben aufgestellten Bedingungen erfüllen soll.

In der That giebt die Bedingung, dass die Curve durch den Punkt A gehen soll, 2 Gleichungen, die bestimmte Richtung ihrer Tangente in A führt zu einer

[illegible] Gleichung (§. 325. a.), die bestimmte Lage der diese Tangente enthaltenden Krümmungsebene zu einer 5ten Gleichung, und die Bedingung, dass der Punkt A der doppelt gekrümmten Curve ursprünglich der Punkt A der ebenen Curve gewesen, dass [illegible] Curve in A und letztere in A einander gleiche Krümmungshalbmesser haben, leitet zu einer 6ten Gleichung. Auf gleiche Art ergeben sich auch für den Punkt B und für die Tangente, die Krümmungsebene und den Krümmungshalbmesser daselbst 6 Gleichungen. Man hat daher in Allem 12 Gleichungen zwischen den 12 Constanten und kann damit letztere vollkommen bestimmen.

Statt der einen der zwei Gleichungen für die Krümmungshalbmesser in A und B kann auch die Gleichung [illegible] welche ausdrückt, dass die Länge der [illegible] Curve von A bis B eben so gross, [illegible] ursprünglichen, einfach gekrümmten von [illegible]

[illegible] besondern Falle, wenn die ursprüngliche [illegible] Kreis ist, hat man von diesen zwei Gleichungen für den einen Krümmungshalbmesser und die [illegible] A bis B nur die letztere beizubehalten, da [illegible] constante Krümmungshalbmesser in der [illegible] Differentialgleichung selbst mit vorkömmt. Die [illegible] der Bedingungsgleichungen reducirt sich daher [illegible] Falle auf 11. Von der andern Seite ist dann, [illegible] gehörig, auch die Zahl der durch Integration entstehenden Constanten um Eins geringer, als im allgemeinen Falle, da beim Kreise die zweite Differentialgleichung sich nur bis zur zweiten Ordnung erhebt.

Wird die Curve in einem Punkte M unterbrochen und soll nichtsdestoweniger das Gleichgewicht

fortdauern, so genügt es hier nicht, wie in §. 318. *c.* und §. 325. *b.*, bloss das letzte Element LM fest zu machen, sondern es müssen, um die zwei durch die Unterbrechung in M verloren gehenden, nach KN und LO gerichteten, elastischen Kräfte zu ersetzen, die zwei letzten Elemente KL und LM, oder, was dasselbe ist, die letzte Tangente und die letzte Krümmungsebene, unbeweglich gemacht werden.

§. 333.

Ziehen wir zum Schlusse noch den einfachsten Fall in Betracht, wenn X, Y, Z null sind, und daher nur durch Kräfte, welche am Anfang und Ende des Fadens angebracht sind, die zweite Krümmung desselben erzeugt wird. Die Kräfte am Anfange, d. h. die endlichen Kräfte, welche auf Punkte wirken, die mit den beiden ersten Elementen in unveränderlicher Verbindung stehen, seyen, wie in §. 326., auf eine einfache Kraft A und ein Paar reducirt, dessen Moment $= m$, und dessen Ebene auf A normal stehe; auch werde, wie dort, die Richtung von A zur Axe der x genommen. Die Momente dieser Kräfte in Bezug auf drei Axen, die man durch den Punkt (x, y, z) parallel mit den Axen der x, y, z gelegt hat, sind alsdann:

$$(X) = m,\ (Y) = -Az,\ (Z) = Ay,$$

und die erste Differentialgleichung der Curve wird damit:

$$mdx + A(ydz - zdy) = -vds = -\vartheta d\chi.$$

Wir ersehen hieraus unter andern, *dass, wenn auf den Anfang des Fadens bloss ein Kräftepaar wirkt, die zweite Krümmung*, $= d\chi : ds$, *in jedem Punkte proportional* mit $dx : ds$, d. i. mit dem Cosinus des

Winkels ist, den die Tangente der Curve mit der Axe der x macht, also *mit dem Sinus des Winkels, den die Tangente mit der Ebene des Paares macht*, dass folglich an den Stellen der Curve, wo ihre Tangente mit der Ebene des Paares parallel läuft, die zweite Krümmung verschwindet, und an den Stellen am grössten ist, wo die Tangente auf der Ebene des Paares normal steht.

Zusatz. Ist die Gestalt des Fadens, auf welchen nur am Anfang und Ende Kräfte wirken, ursprünglich kreisförmig, so kann seine nachherige Gestalt auch die einer cylindrischen Spirale seyn, deren Axe, wenn die Kräfte am Anfange, wie vorhin, auf eine einfache Kraft A und ein auf der Richtung von A normales Paar reducirt worden, mit der Richtung von A zusammenfällt. Denn erstens hat diese Spirale eben so, wie ein Kreis, einen constanten Krümmungshalbmesser, der hier dem des ursprünglichen Kreises gleich seyn muss; und zweitens wird auch der Momentengleichung durch die Gleichungen einer cylindrischen Spirale, deren Axe die Axe der x ist, Genüge geleistet. Diese Gleichungen sind nämlich (§. 327.), wenn a den Halbmesser des Cylinders der Spirale und b die Weite ihrer Gänge bedeutet, und wenn man der Kürze willen $2\pi : b = h$ setzt:

$$y = a\cos hx, \quad z = a\sin hx.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt unter der Annahme, dass dx constant ist:

$$dy = -hzdx \quad , \quad dz = +hydx,$$
$$d^2y = -h^2ydx^2, \quad d^2z = -h^2zdx^2,$$
$$d^3y = +h^3zdx^3, \quad d^3z = -h^3ydx^3;$$

folglich $ds^2 = (1+h^2a^2)\,dx^2$, und wenn man

$ydx - xdy = t$, $dyd^2x - dxd^2y = t'$,
$d^2yd^3x - d^2xd^3y = t''$ und $d^2y^2 + d^2x^2 = u$ setzt:
$t = ha^2dx$, $t' = h^3a^2dx^3$, $t'' = h^5a^2dx^5$, $u = h^4a^2dx^4$.

Die Momentengleichung aber, welche sich mit den jetzt angenommenen Zeichen also schreiben lässt:

$$mdx + At = -\vartheta ds \frac{t''dx}{t'^2 + udx^2},$$

wird dadurch $m + Aha^2 = -\frac{\vartheta h}{\sqrt{1+h^2a^2}} = -\frac{2\pi\vartheta}{l}$,

wo l die Länge eines Ganges der Spirale ausdrückt (§. 327.). Diese Gleichung enthält nun bloss Constanten und giebt eben damit zu erkennen, dass unter den vorausgesetzten Umständen der Faden die Spiralform annehmen kann. Hiernach sind wir berechtigt zu schliessen:

Wird, wie dies immer möglich ist, ein elastisch drehbarer und ursprünglich kreisförmiger Faden in die Gestalt einer cylindrischen Spirale gebracht, und werden die zwei ersten, so wie die zwei letzten Elemente des Fadens in der dadurch erhaltenen Lage unbeweglich gemacht, so wird der dazwischen begriffene Faden von selbst in der Spiralform verharren.

Noch kann man bemerken, dass der Krümmungshalbmesser der Spirale, also auch der Halbmesser des ursprünglichen Kreises,

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(t'^2+udx^2)}} = \frac{1+h^2a^2}{h^2a} = \frac{l^2}{4\pi^2a} \text{ ist.}$$

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	31	Zeile	1 v. o. lies: die ihn treffende.
—	32		6 v. u. vor *nach* setze ein Komma.
—	45	—	3 v. o. lies: und hiernach
—	59	—	8 v. u. lies: AF, $A'F'$, $A''F'$, ...
—	101	—	12 v. u. lies: unbekannten Richtungen
—	139	—	4 v. u. An das Ende der Zeile setze ein Komma.
—	159	—	8 v. u. vertilge: auch
—	185	—	9 v. u. lies: wo
—	212	—	5 v. o. vertilge: $+ (1 : h)$.
—	221	—	9 u. 10 v. o. statt: geben, lies: getrieben.
—	230	—	5 v. u. statt: $\int Y' dt$ lies: $\int X' dt$.
—	249	—	1 v. o. lies: eine positive constante Gröss ist.
—	284	—	7 u. 6 v. u. lies: auf den Faden keine äussern Kräfte

Druck von J. B. Hirschfeld.

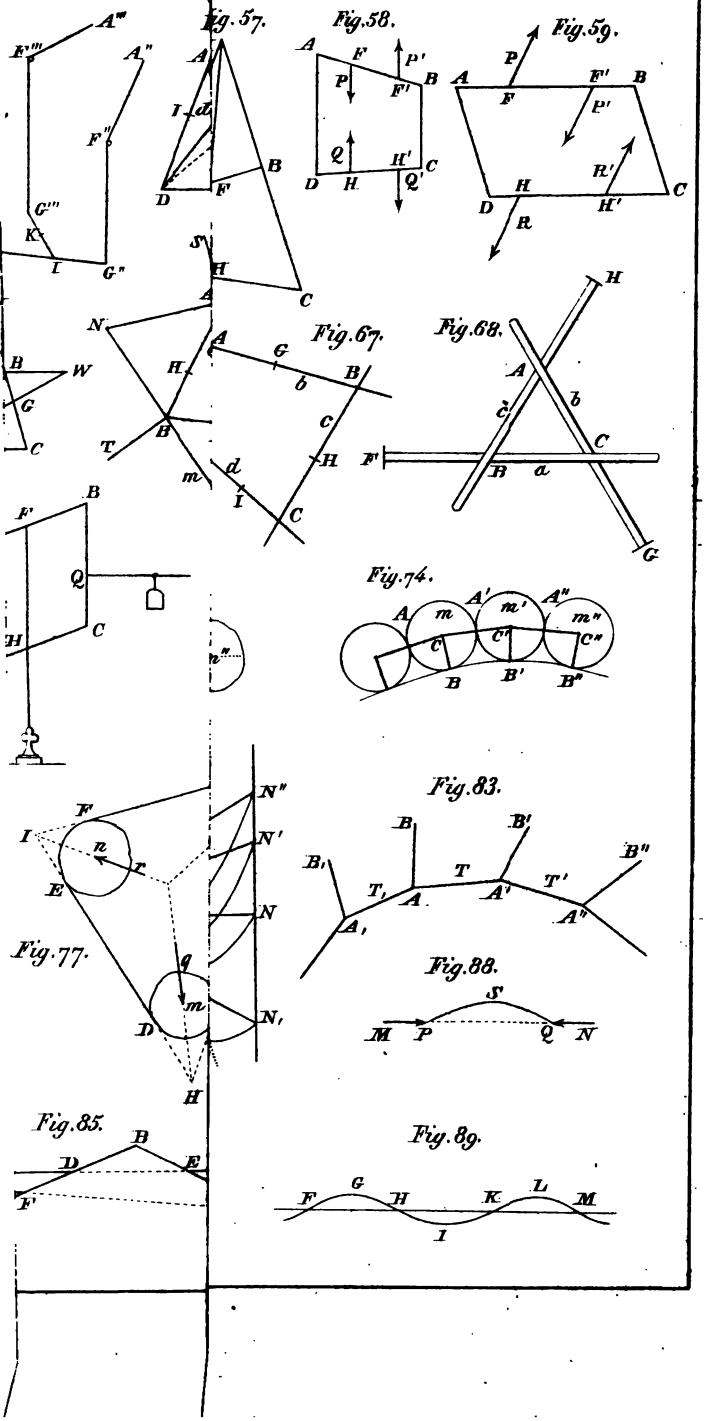
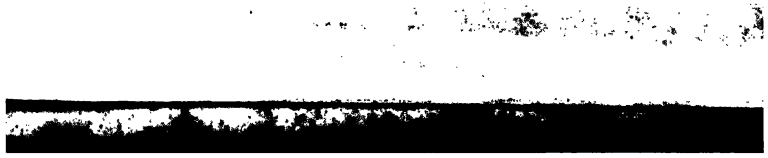


Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 74.
Fig. 77.
Fig. 83.
Fig. 85.
Fig. 88.
Fig. 89.



ENGINEERING LIBRARY

Stanford University Libraries
3 6105 010 863 970

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004